16

POLIEDROS REGULARES
Y ARQUIMEDIANOS

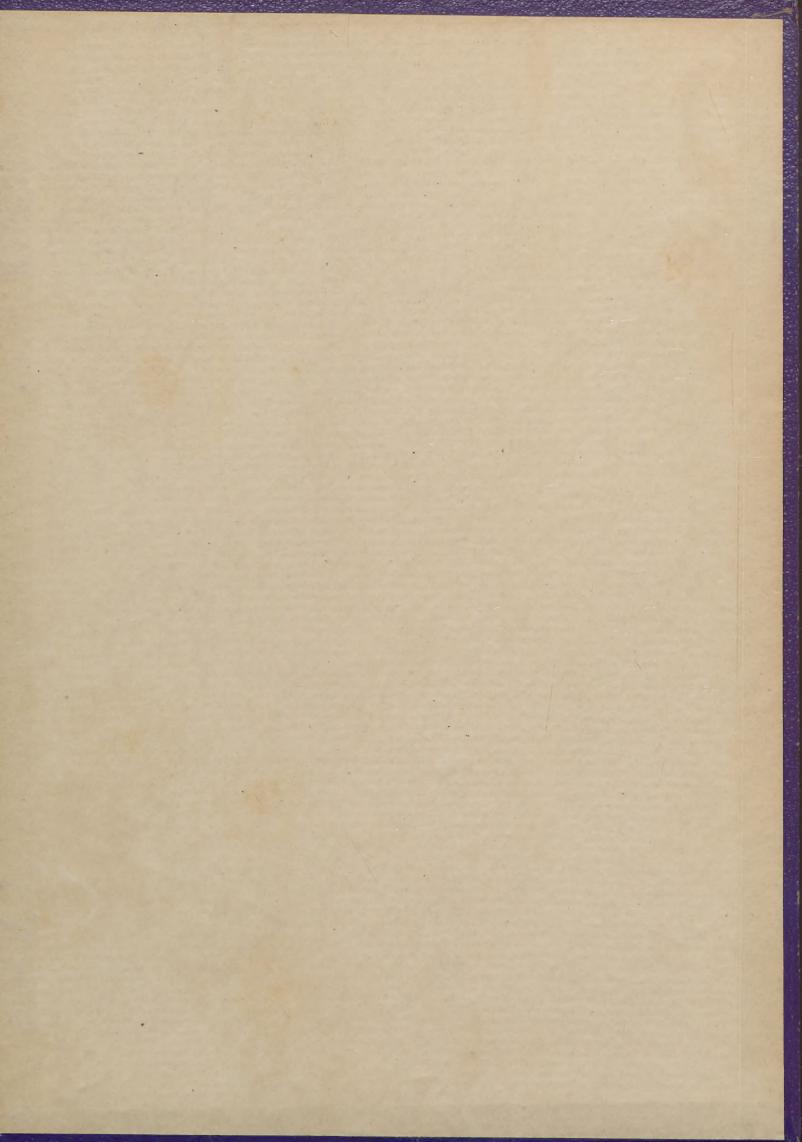
Láminas 1 al 25



UNIVERSIDAD DE SEVILLA Facultad de Matemáticas Biblioteca

0. PED-127382

i.31210925 - Bib. - TAP/012



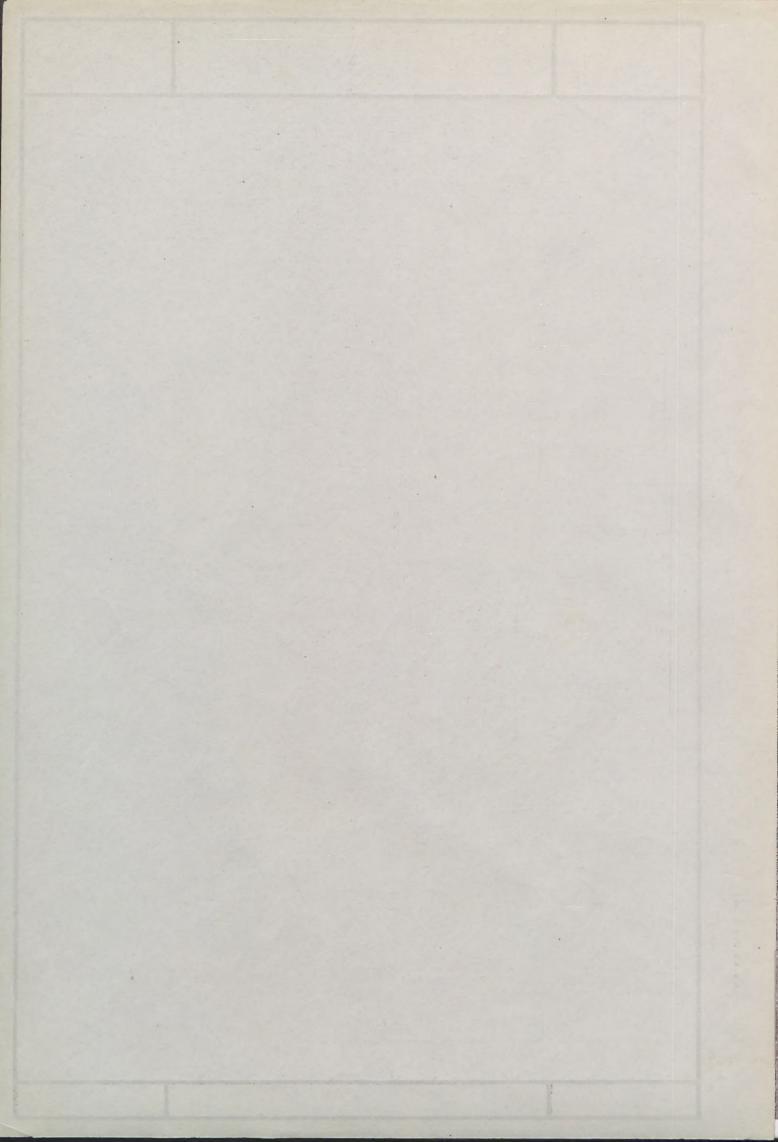
Lamina 1

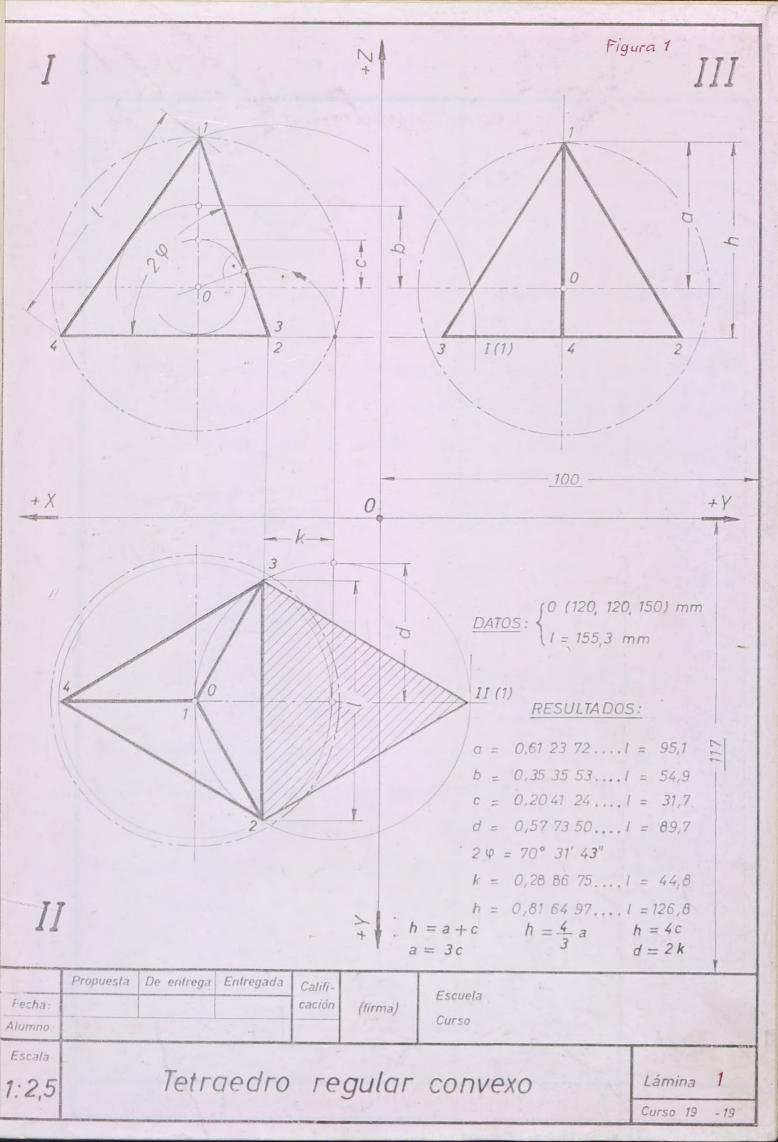
Emerciado

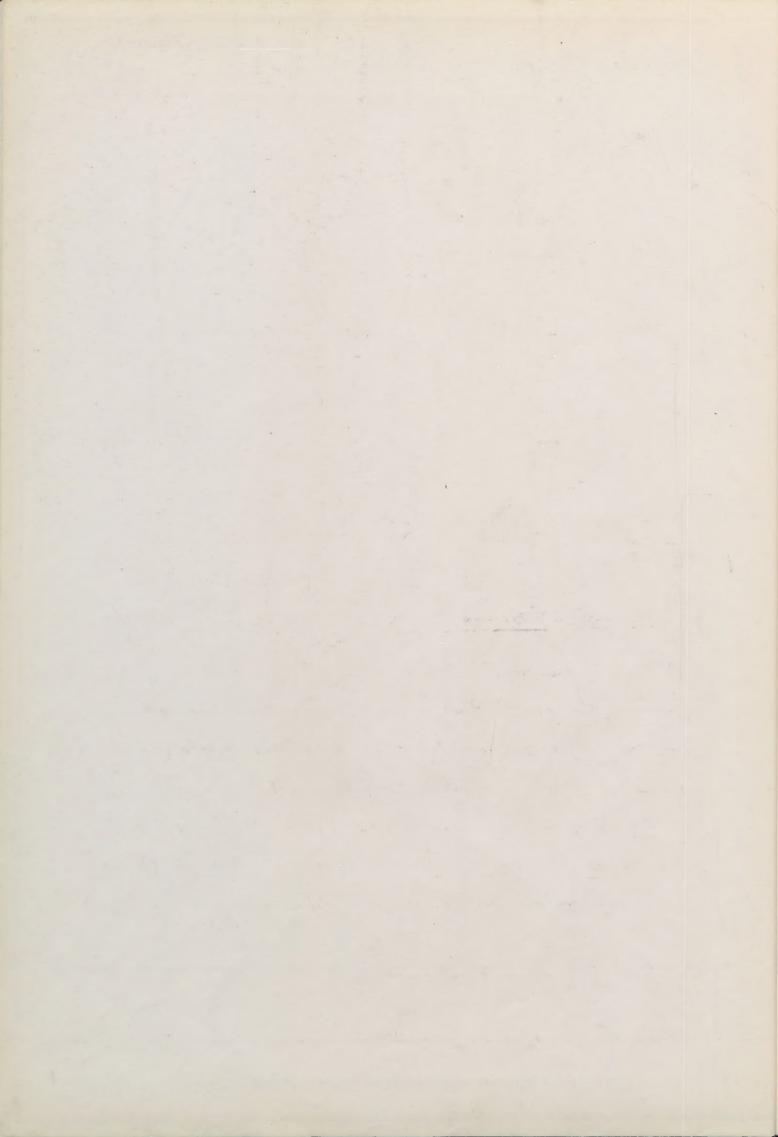
Representar por el mitodo gnáfico-analítico, en los planos I, I g III, un tetraedro acquilar de 89.8 mm de lado, siendo las coordenadas de su centro 0 (72, 72, 85) mm.

Calcular previouente sus cotas fundamentales, que serviran de comprobación al trasado gráfico. Dibujar en formats A3V g a escala 1:1.

0 (72, 72, 85) mm DATOS L= 89,8 mm







PROCESO GRÁFICO

graficamente se resuelle este ejercicio situando el tetraedro con una cara paralela a II y la contigua perpendicular a I. Los vértices se sumeraran del 1 al 4.

La prospección sobre II (figura 1) es directa y mos da sapidamente las de los enatro vértices.

La proyección sobre I se obtiene sequidamente colocando la cara 2.3.4 paralela a II y mediante giro de la cara contigua 1.2.3, alrededor de la arista 2.3, se obtiene el cuarto vértice mº 1.

La projección sobre III se deduce de las obternidas anteriormente le sobre I g II.

PROCESO GRÁFICO - ANALÍTICO

Jara la reducción de la imenitables errores gráficos, y facilitar al mismo tiempo el trasado, con su continua comprobación, debevan calcularse previamente las magnitudes acotadas en la figua 1, según la tabla correspondiente.

Lea longitud del lado se ha fijado de forma que el radio as de la esfera circunscrita tenga el valor de 55 mm. Lea dimensión de le con seio decimales, será

con cuyo valor; como base de cálculo, obtenemos:

banina &

UNE A4 210 X

$$a_{4} = 0.61 \ 23 \ 72 \times 89.81 \ 46.88 = 55.0 \ mm$$
 $b_{4} = 0.35 \ 35.53 \times id = 31.8 \ m$
 $c_{4} = 0.20 \ 41 \ 24 \times id = 18.3 \ m$
 $d_{4} = 0.57 \ 73.50 \times id = 51.8 \ m$
 $2 P_{4} = 70^{\circ} 31^{\circ} 43.6 \ m$
 $k_{4} = 0.38 \ 86 \ 75 \times id = 25.9 \ m$
 $k_{4} = 0.81 \ 64.97 \times id = 73.3 \ m$

Con estos valores de verifican las signientes relaciones:

$$h_{\mu} = \alpha_{4} + c_{4} = 55.0 + 18.3 = 73.3 \text{ mm} \quad h_{\mu} = \frac{4}{3} \alpha_{4} = \frac{4}{3} \times 55 = 73.3 \text{ mm}$$

$$h_{\mu} = 4 c_{4} = 4 \times 18.3 = 73.2 \text{ mm} \quad \alpha = 3 c = 3 \times 18.3 = 54.9 \text{ mm}$$

$$d_{4} = 2 k_{\mu} = 2 \times 25.9 = 51.8 \text{ mm}$$

FIGURA CORPOREA

Le obtiene por acoplamients de 4 triangules equilaters de 89.8 mm. de lado (dato del ejercicio).

RESUMEN DEL CALCULO DE MAGNITUDES DE ESTE EJERCICIO

1) Nomenclatura empleada ly = Lado del tetraedro (dato).

04 = Radio de la esfora circumscrita al tetraccho.

b, = Radio de la esfora tangente a las aristas.

C, = Radio de la estera inscrita

DESCRIPTION OF CALCULATE SET STATE STATE STATE STATES

de - Pado es la circumperación circumente al piligeno de

20 = in a restilian del diedes la made par de sans contigues.

k4 = Spotenia del pot que de una sec.

h_ = set a dil tennedio.

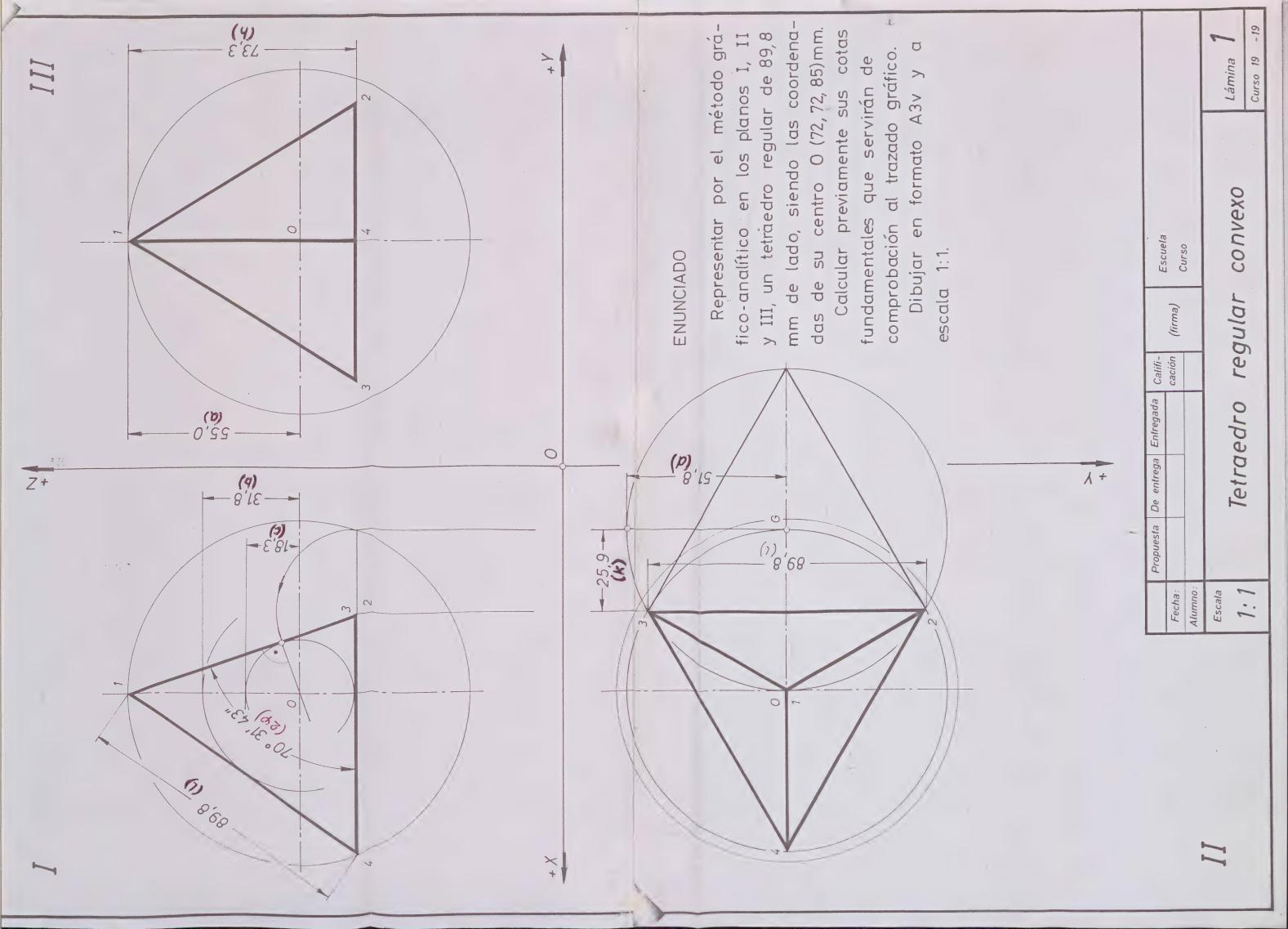
S = Superficie.

V4 = Volumen.

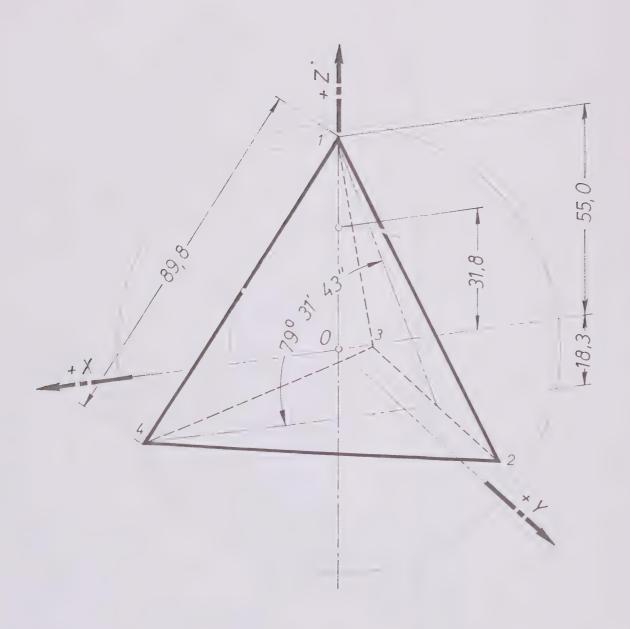
CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado	
a ₄	(1) V6 & 4	0, 61 23 72 l4	
<i>b</i> ₄	(2) $\frac{\sqrt{2}}{4} \ell_4$	0.35 35 53 14	
C ₄	$(3) \frac{\sqrt{6}}{12} \ell_4$	0,20 41 24 lu	
d4	$(4) \qquad \frac{\sqrt{3}}{3} \ell \ 4$	0,57 73 50 l4	
2 Ψ	(5) seu $\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$	sen 9 = 0, 57 73 50 2 9 = 70° 31' 43,6"	
k ₄	(c) V3/6 lu	0, 28 86 75 14	
h ₄	(7) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ℓ_4	0,81 64 97 &4	
SA	(8) V3 & 2 4	1. 73 20 5/ {2	
V ₄	$(9) \frac{\sqrt{2}}{12} \ell_4^3$	0.11 78 51 \(\ell_4^3 \)	
(10) Relaciones entre magnitudes			
$h = G + C_4$ $h = \frac{4}{3} G_4$ $h_4 = 4 C_4$			
$a_4 = 3c_4$ $d_4 = 2k_4$			











Lamira =

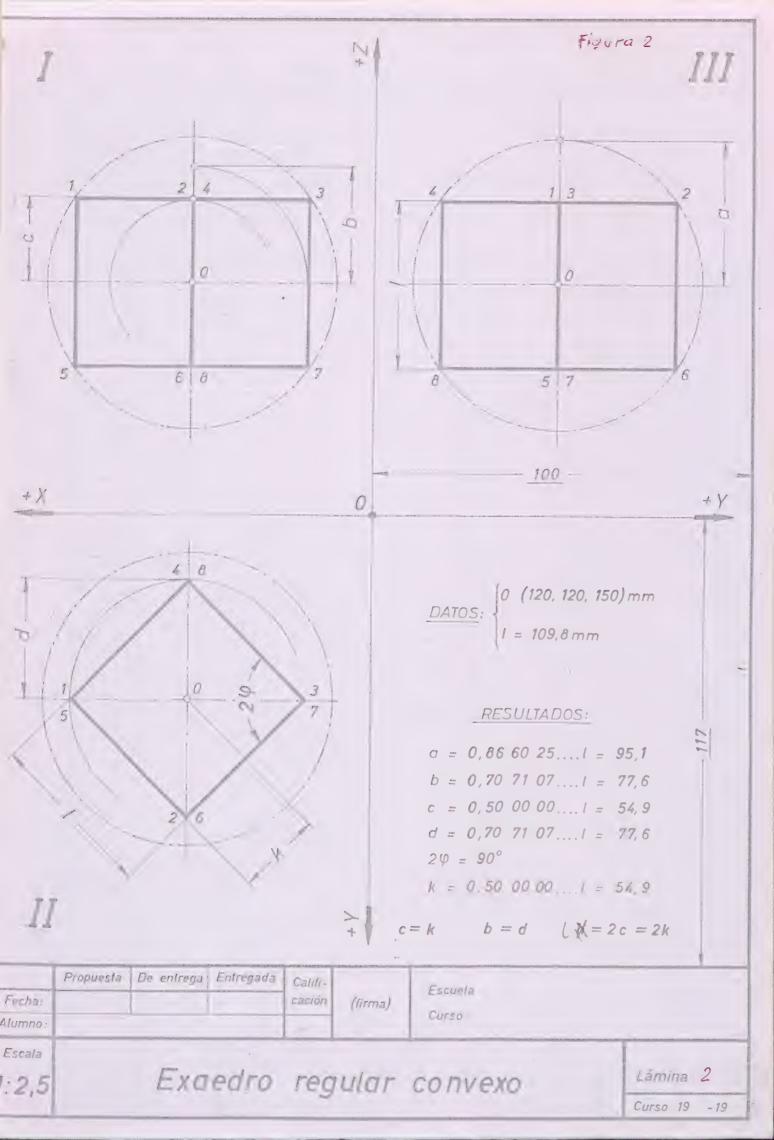
Emenciado

Representar por el metodo gráfico-analítico, en los planos I, II y II, un escaedo regular de 63.5 mm de lado, riendo las coordenadas de ou centro v / 79. 72. 25) 11. 11.

que rerviran de comprobación al trasado grafico. Dibujar en formato A3V, a sura 111.

0 (72, 72, 85) n m







ARROSENO GRÁFICO

proposer de la la de los ocho verticas.

Las sencillas proyecciones sobre I g II, ignales entre ci i de altera l. nos dan las de sus ocho vertices en cada una de ellas.

PROCESO GRAFICO - ANALÍTICO

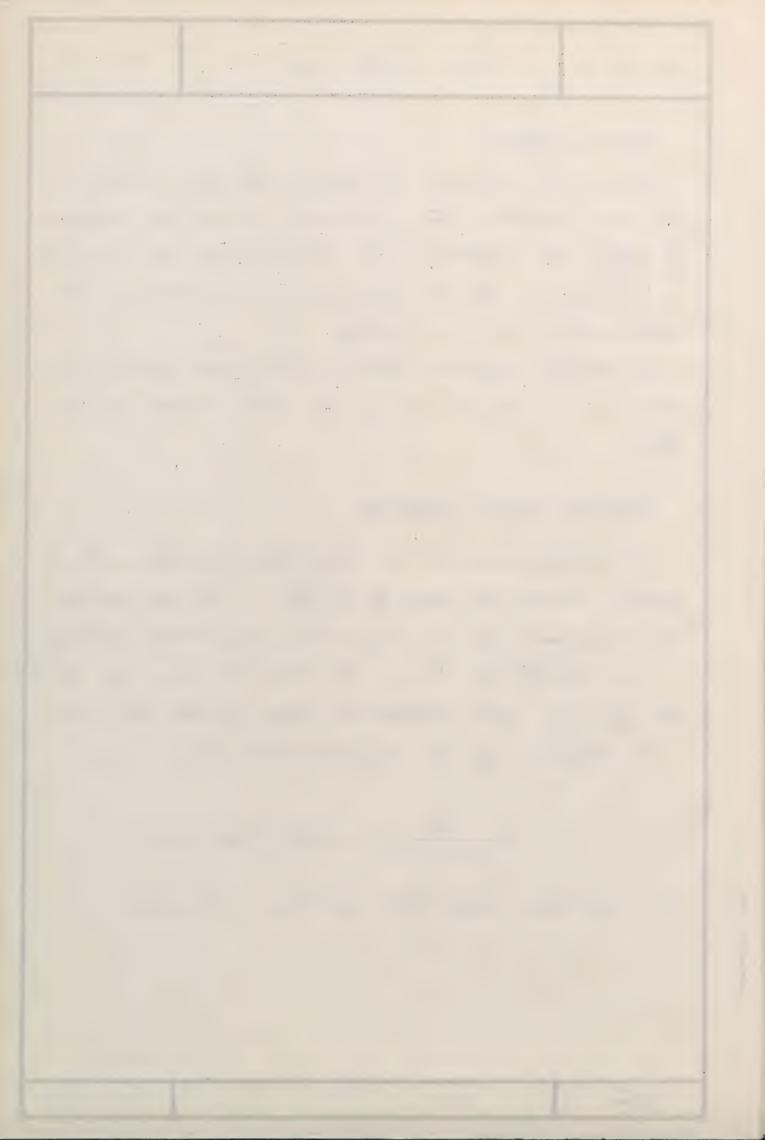
Le calcularan previamente las magnitudes acotadas en la Lique 2, tomando los valores de la tabla. Ellas mos rervirain

para compertación de las correspondientes magnitudes qualitas.

ba longitud del lado se ha fijado de forma que el radio a de la esfera circumscrita tenga el valor de 55 mm.

La dimensión le con seis decimales, será:

con engo melo: como tore de calculo, obtenemos:



$$a_{c} = 0.86 \ 60 \ 35 \times 63.50 \ 85 \ 60 = 55.0 \ mm$$

$$b_{c} = 0.70 \ 71 \ 07 + 2d. = 44.9$$

$$c_{c} = 0.50 \ 00 \ 00 + 2d. = 31.8$$

$$d_{c} = 0.70 \ 71 \ 07 \times 2d. = 44.9$$

$$2 \theta_{c} = 90^{\circ}$$

$$k_{c} = 0.50 \ 00 \ 00 \times 2d = 31.8$$

Con the values at residence by against the resonance: $C = K = \frac{21.8 \text{ mm}}{6} = \frac{6}{6} = \frac{44.9 \text{ mm}}{6} = \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{2}{6} = \frac{2}{6} = \frac{2}{6} = \frac{2}{6} = \frac{31.8}{6} = \frac{63.6 \text{ mm}}{6}$

FIGURA CORPOREA

Le obtiene por acoplamients de 6 cuadrades de 63,5 mm. de lado (dato del proceso).

RESUMEN DEL CALCULO DE MAGNITUDES DE ESTE EJECCICIO

Nomenclatura empleada la bado del exactro (dato)

a = Radio de la esfera circumscrita al exaedro.

b6 = Radio de la esfera tangente a las aristas.

C6 = Radio de la esfera inscrita

de = Radio de la circumferencia circumscrita al poligono de



kg = Apotema del poligiono de una roa

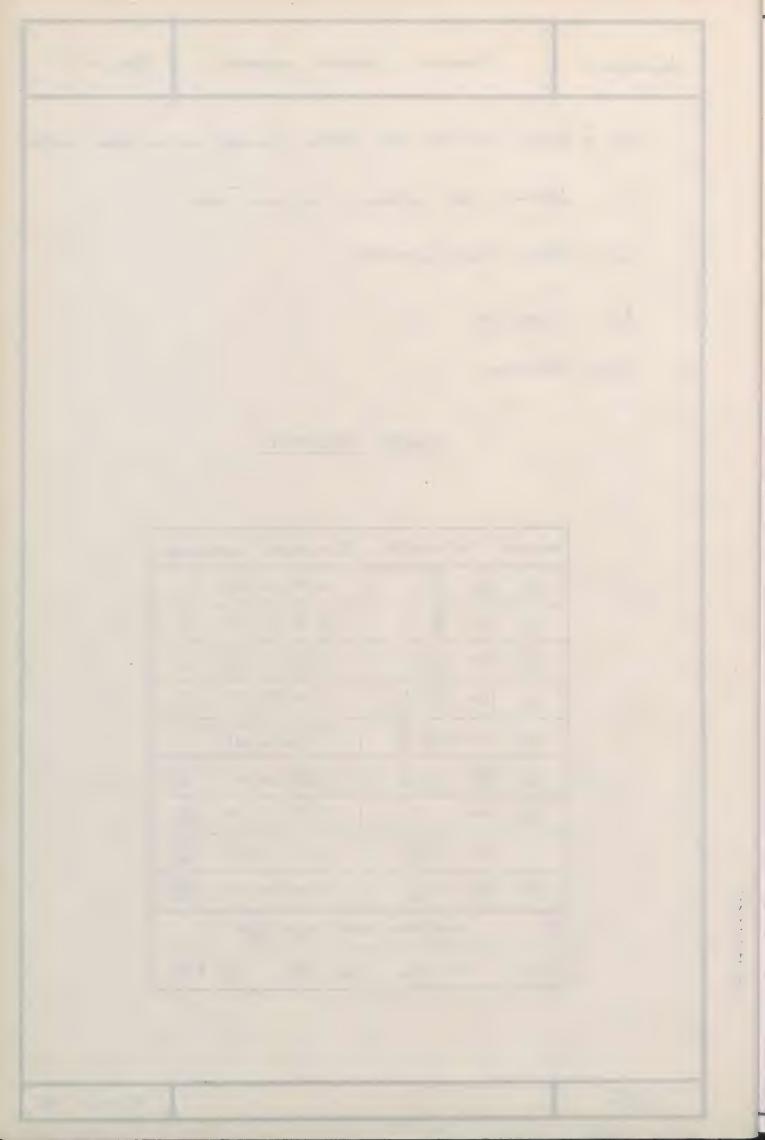
ho = Allura del exactro.

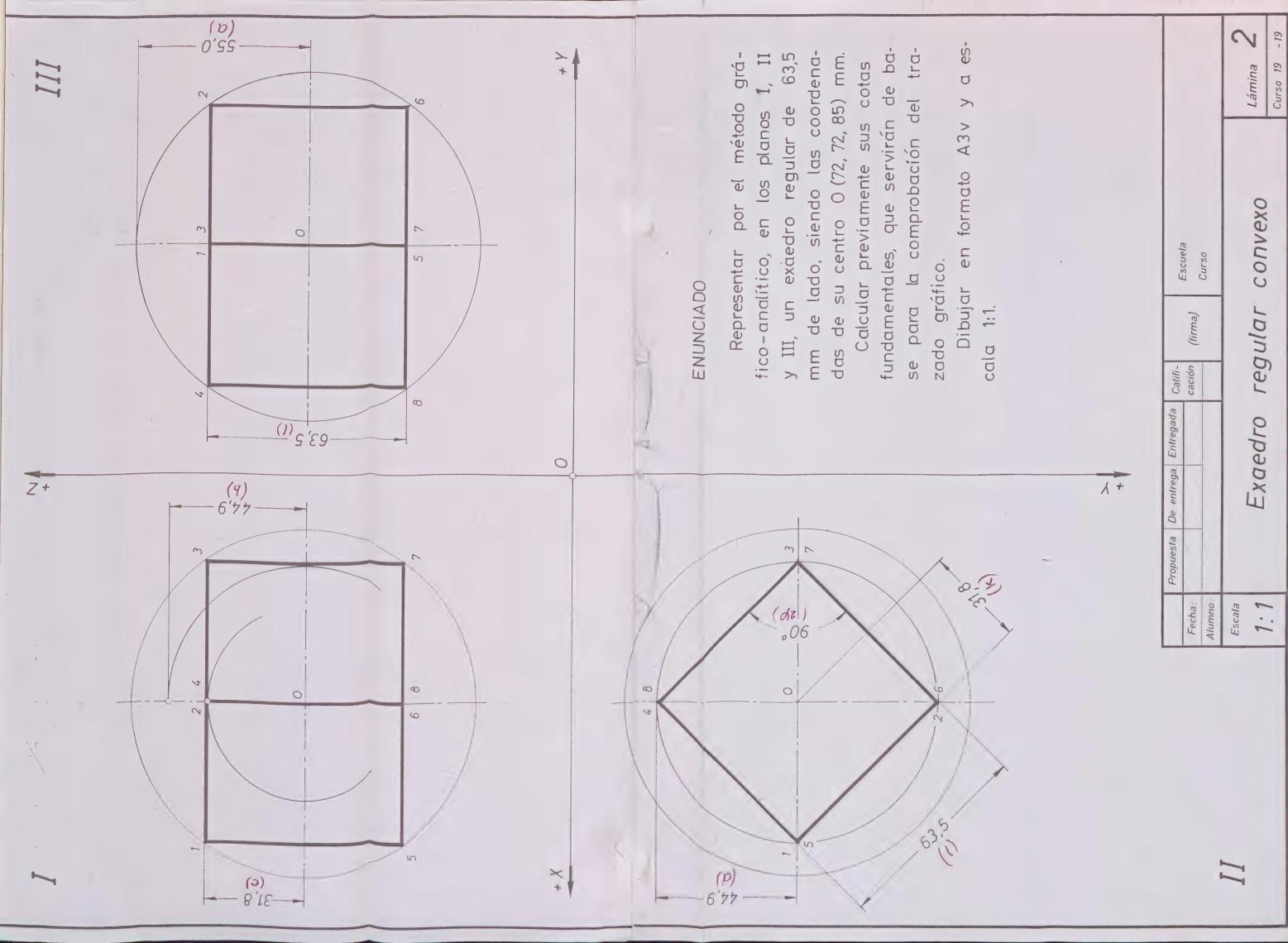
S = Luperficie.

V6 = Volumen.

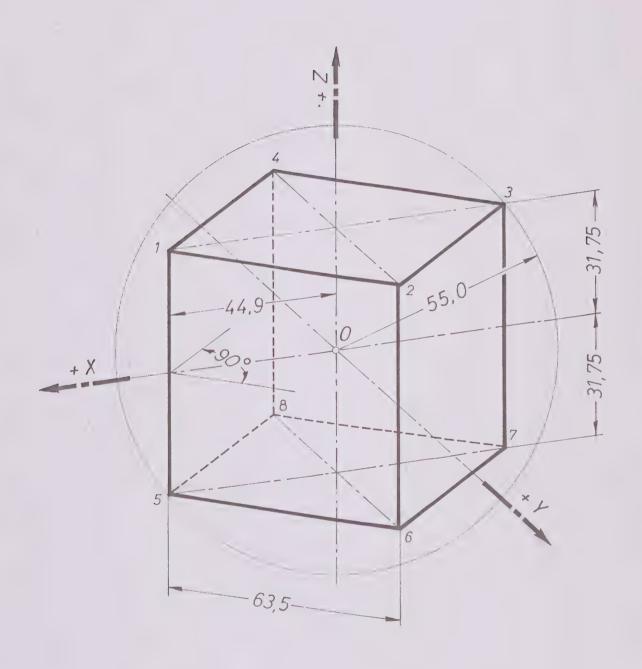
CUADRO SINOPTICO

	_	
Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
a_6	(11) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ℓ_6	0.86 60 25 l ₆
b ₆	(12) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ℓ_6	0, 70 7/ 076
C ₆	(13) $\frac{1}{2}$ ℓ_6	0,50 00 00 ls
de	(14) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ℓ_6	0,70 71 07 lo
246	(15) sen $\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$	sen $\varphi = 0.70 71 07$ $2 \varphi = 90^{\circ}$
K6	(16) ½ l ₆	0,50 00 00 6
he	(17) 1 %	1. 00 00 00 16
S	(18) E & 2	6.00 00 00 62
V	(19) 1 le 3	1. 00 00 00 3
(20)	Relaciones entre magnitudes	
C6 = K6	b6 = d6	$h_6 = 2c_6$ $h_c = 2k_6$









Exaedro regular convexo



Lámina 3

Emunciado

Representar por el mitodo gráfico-analítico, en los plames i. II o III, un octaedro regular de 77,8 mm. de lado, siendo las coordenadas de su centro 0 (72, 72, 85) mm.
Calcular prenamente sus cotas fundamentales que enviran de comprobación al trasado gráfico.
Dibujar en formato A3V o a escala 1:1.

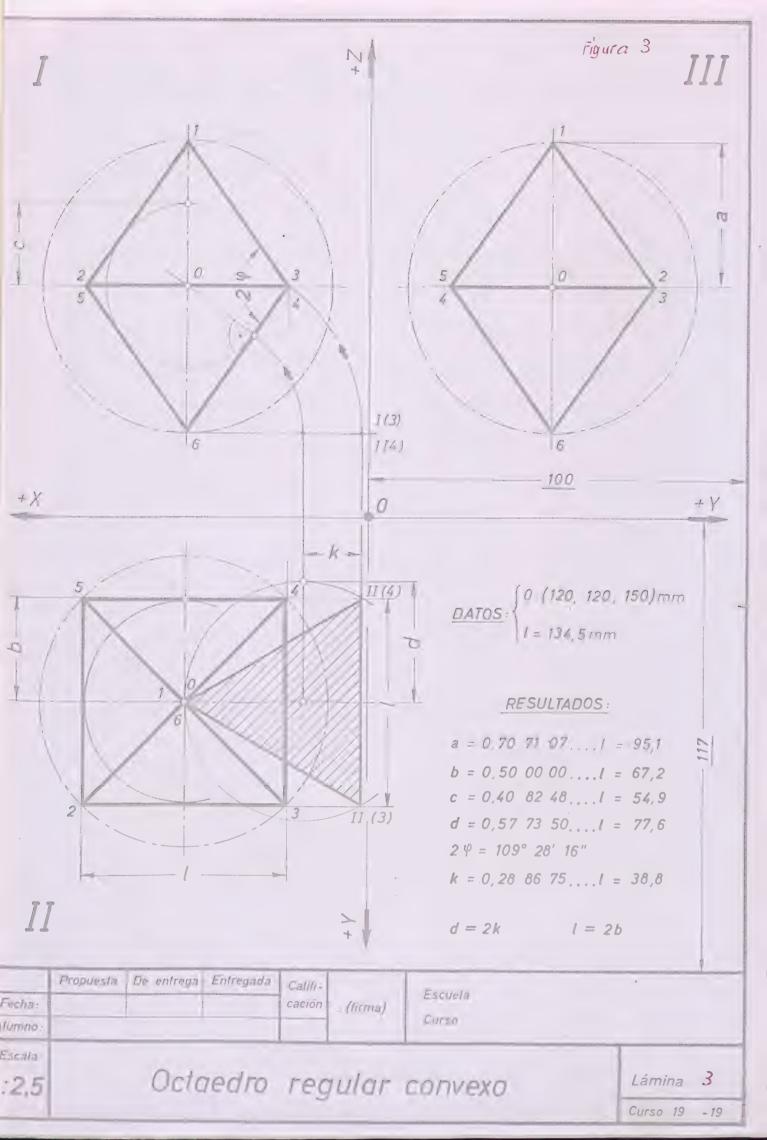
DATOS 0 (72, 72, 85) mm

L= 77, 8 mm.

UNE A4 210 X 297

CC







PROCESO GRÁFICO

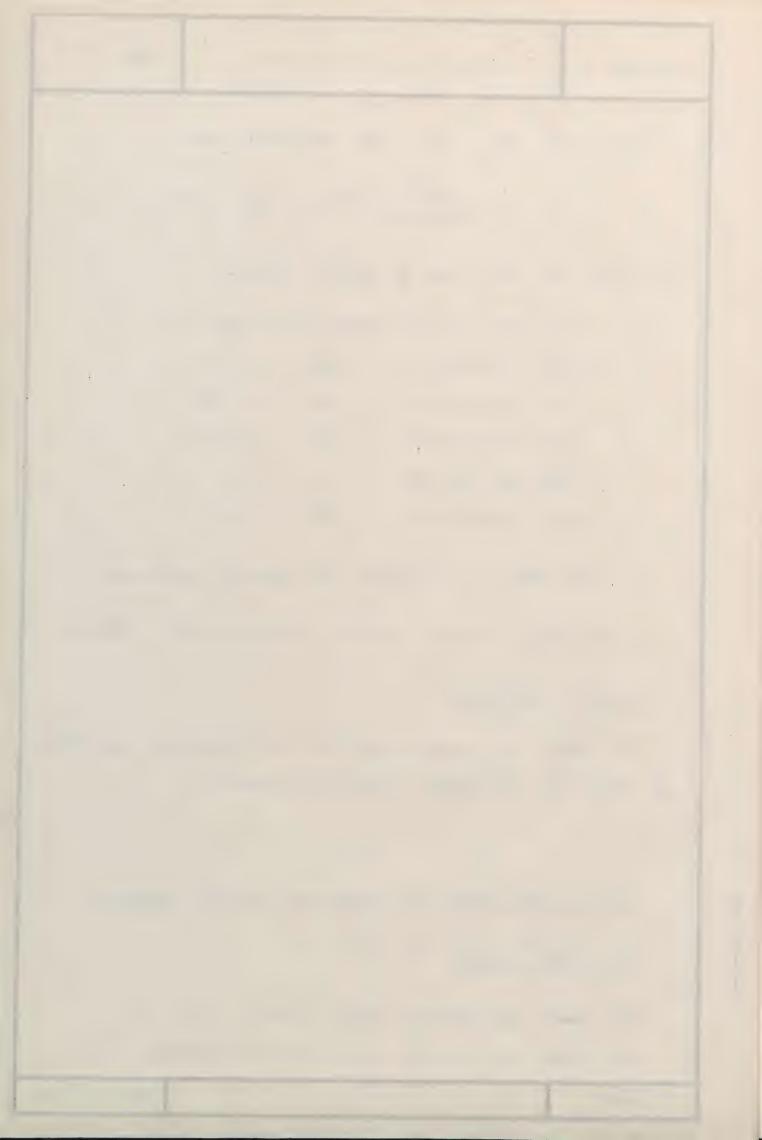
L'tuarement el octardes, con respecto a los planos de progerción, de forma: que una de sus caras sea perpendicular al plano I y una diagonal del mismo que une vértices o pue, to, sea simultaneamente perpendicular a I.

Conociendo el lado, el trasado de la projección del octaedro en el plano II. (fig. 3) es inmediato, dándonos al mismo tiemo das projecciones de sur i estates, que se momentos del tal. 6.

La projección en I se obtiene por el giro de la cara II (6:3:4), perpendicular a I, alrededor de un eje que pasando por II (6) es también perpendicular a I; el centro I (0) de la esfera circunscrita, así como su radio, se obtienem por el anterior que, sinciendo de sempetración al obtinido ano teniron mente en II, ja que deberrir ser de ignal lengatura. La projección sobre II se deduce de las I y I.

PROCESO GRÁFICO. ANALÍTICO

maquitudes acotarias en la figura 3, temande es valores de les exércientes de la talla incluida en la cuirura. La longitud del laco dade se ha fijado pertendo de la talla laco de la sifera circumsenta terque el valor exacto de 55 mm.



Cg = Radio de la esfera inscrita

de = Radio de la incompressión circumsorità al poligono de una cara.

2 % = Anguls cectilines del diedro formado por dos caras contiguas

K8 = Apotema del poligono de una cara

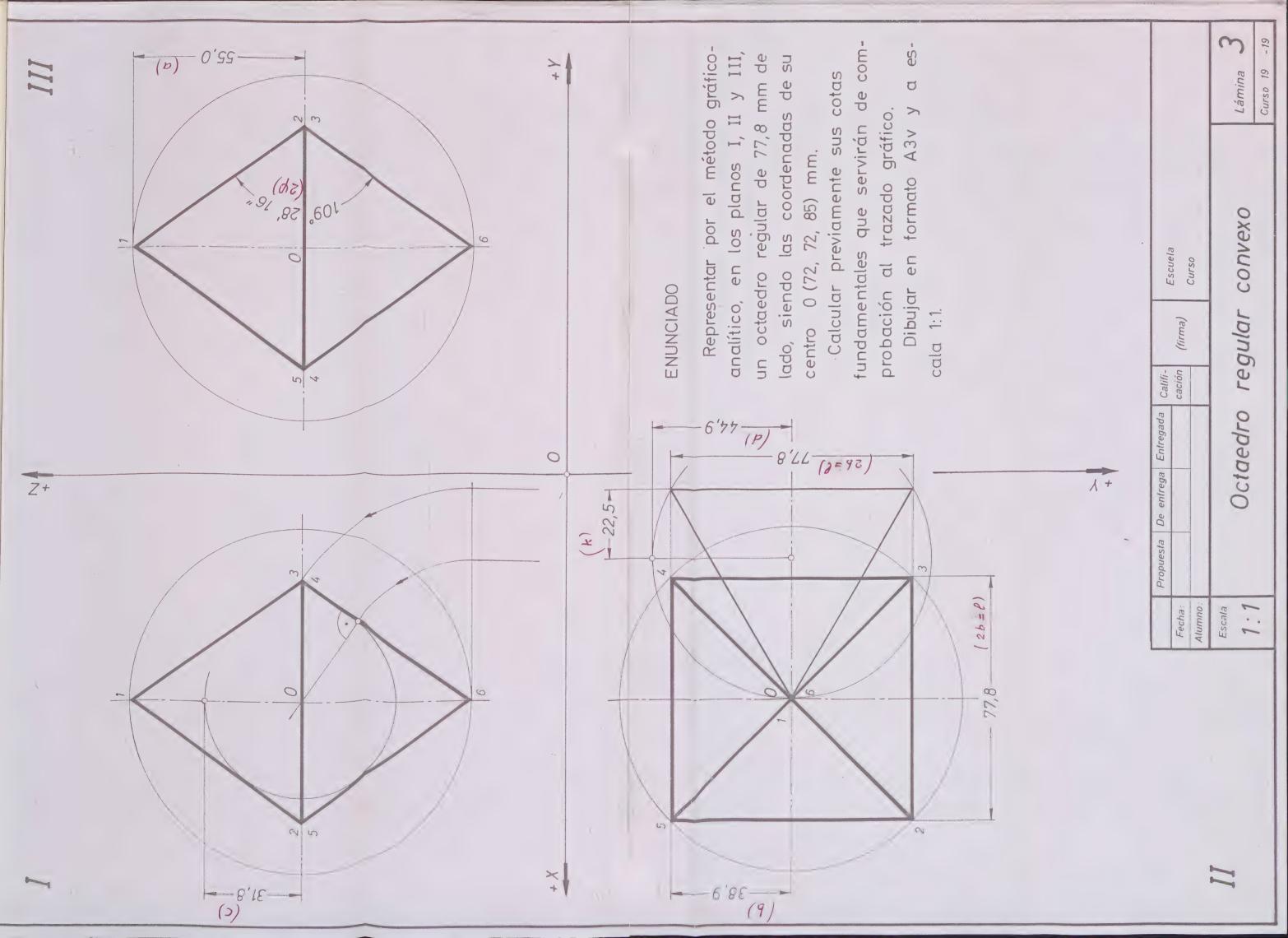
Sg = Luperficie.

Vg = Volumen.

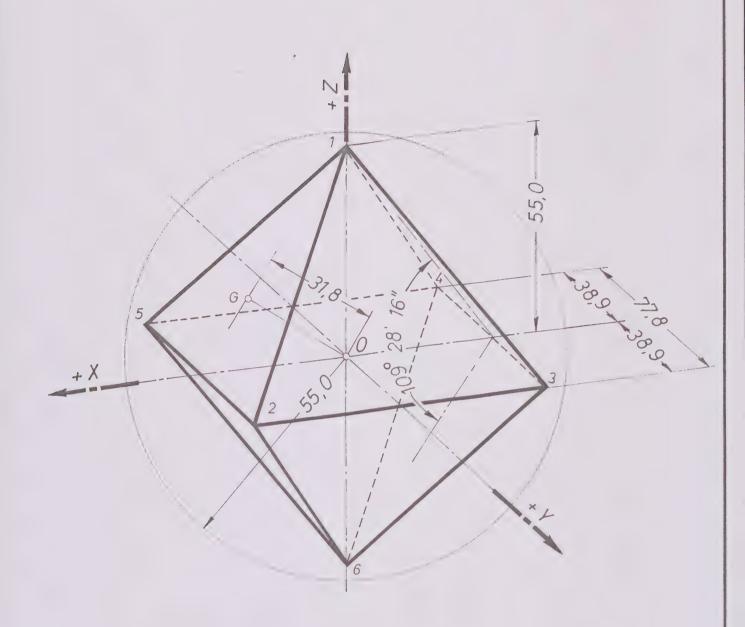
CUADRO SINOPTICO

		P .	1
Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado	
ag	(21) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ l_8	0. 70 71 07 l ₈	×
Ь8.	$(22) \frac{1}{2} t_8$	0, 50 00 00 l ₈	-
Cg	$(23) \frac{\sqrt{6}}{6} \ell_{8}$	0. 40 82 48 l ₈	×
dg	(24) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ℓ_8	0, 57 73 50 fg	×
248	(25) Sen $\% = \frac{\sqrt{6}}{3}$	sen 4 = 0.81 64 97 24 = 109° 28' 16.4"	×
kg	(26) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ t_8	0.28 86 75 le	
58	(27) 2 V3 l _g ²	3.46 41 02 \(\ell_8^2 \)	X
V8	(P8) V2 (8)	0, 47 14 05 (8	×
(29)	Relaciones entre magnitudes		
	do = 2 kg	le = 2 be	









Octaedro regular convexo



has all

200102 4

Enumerado

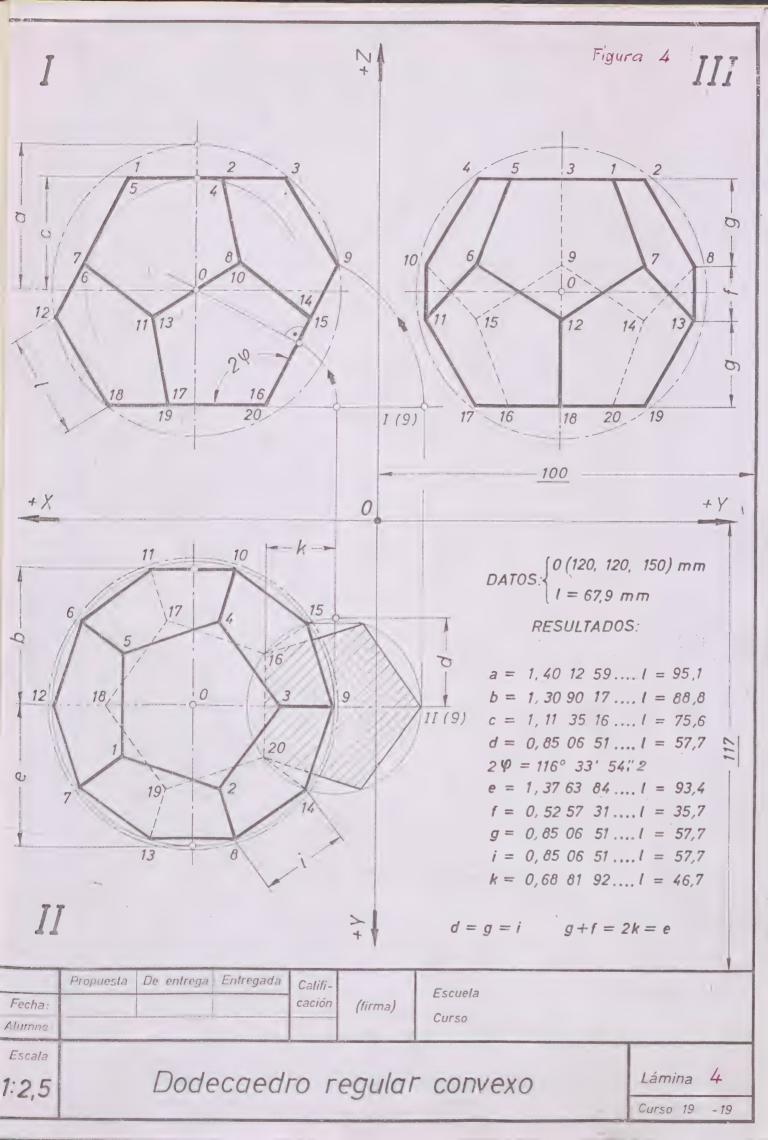
plants I, II g III., um dodecaedro respeito de 39,3 mm de lado, siendo fas coordenadas de un centro 0/ 22, 72 85) mm.

Calcular pren'amente sus cotas fundamentales, que serviran de comprobación al trasado grafico. Dibujar en formato 431 y a esería 1:1.

UNE A4 210 X 297

1-00







PROCESO GRIFICO

caches de forma que una de sus caras sea parates al plamo II y otra contigua perpendicular a I, numerando prevamente su: il les del 1 1 20.

(ver fig. 4) en los planos I g II, g girando simultánea enent dos caras contiguas o consecutivas alrededor de sus respectivas ariotas comunes con la inferior; La prospección de las trayectorias de los vertices girados en el plano I oros permite obtense el sadio de la circumforencia circumscrita al decágono regular que forma el contorno exterior de la prospección othe I del dodecado, así como las prospecciones g arietas de todos sus vértices.

La trajectoria sobre el plano I del giro de los vértices de la cara 9.14.20.16.15, juntamente con las projecciones de estos vértices obtenidos que en II, mas permite obtener en I las projecciones de los mencionados vértices, asé como el centro O de la esfera circumscrita, lo cual mos permite completar la projección sobre I de los restantes vértices y aristas del dodecaedro.

La proyección robre II se deduce de las I g I.

* (intercalar la signiente frase)

mente la determinación del radio de la esfera inscrita, cuyo valor será

G = 1.11 3: 16 x 39.3 = 43.7 mm.

22 - 2 - 20



PROCESO GRAFICO- ANALÍTICO

Tan stiller este proces a accuración processo las maymitudes acotadas en la figura 4, tomando los valores de los confecuentes de la tatta incluida en la misma.

La longitud del lado se ha fijado partiendo de la base de que el radio a de la esfera circunscrita tenga el valor exacts de 55 mm.

La dimensione del lado l con seis decimales, serà:

= 55,0

con euro valor, como base de calculo, obtenemo:

$$a = 1, 20$$
 12 59 x 39, 25 04 17 = 55,0 mm

 $b = 1.30$ 90 17 x id = 51,4 "

 $c = 1.11$ 35 16 x id = 43,7 "

 $d = 0.85$ 06 51 x id = 33,4 "

 $29 = 116^{\circ}$ 33' 54"

$$g = 0.85 \ 06 \ 51 \times id = 33.4 \ u$$
 $i = 0.85 \ 06 \ 51 \times id = 33.4 \ u$

Con estos salores se verifican las signientes relaciones: d = g = i = 33,4 mm g + f = 2k = e = 33,4 + 20,6 = 2 × 27,0 = 54,0 mm

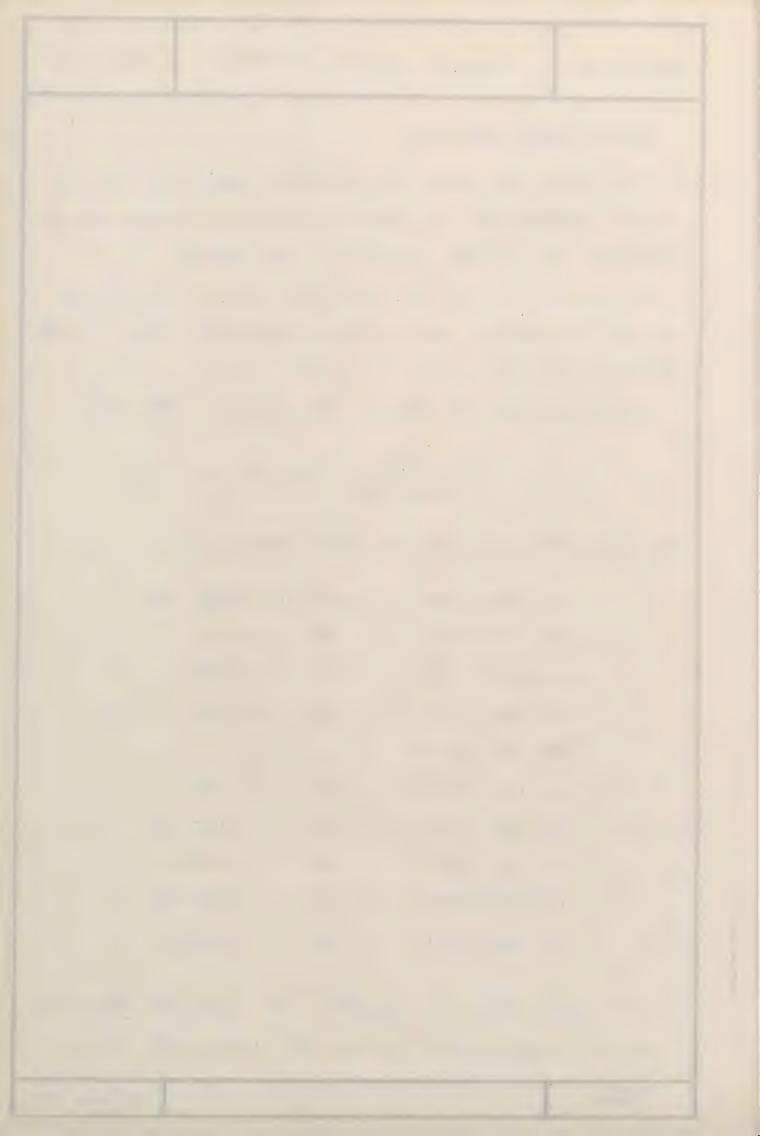


FIGURA CEL. OREA

39.3 mm de lado. (dats del ejercicio).

RESUMEN DEL CÓLCULO DE MAGNITUDES DE ESTE EJERCICIO

Nomenclatura empleada

liz = Lado del dodecardo dado (deto)

a, = Radio de la esfera circumscrita al dodecaedro

b₁₂ = Radio de la esfera tangente a las aristas

C12 = Radio de la esfera inscrita

diz = Radio de la circumferencia circumscrita al petigono de una cara,

24 = Angulo acctitines del diedro formado per de correr contiguas.

en := Radio de la circumferencia circumscrita al decagano cegular, contorno de la virta I.

fiz = Altina imbramedia del contorno de las nistas I g II.

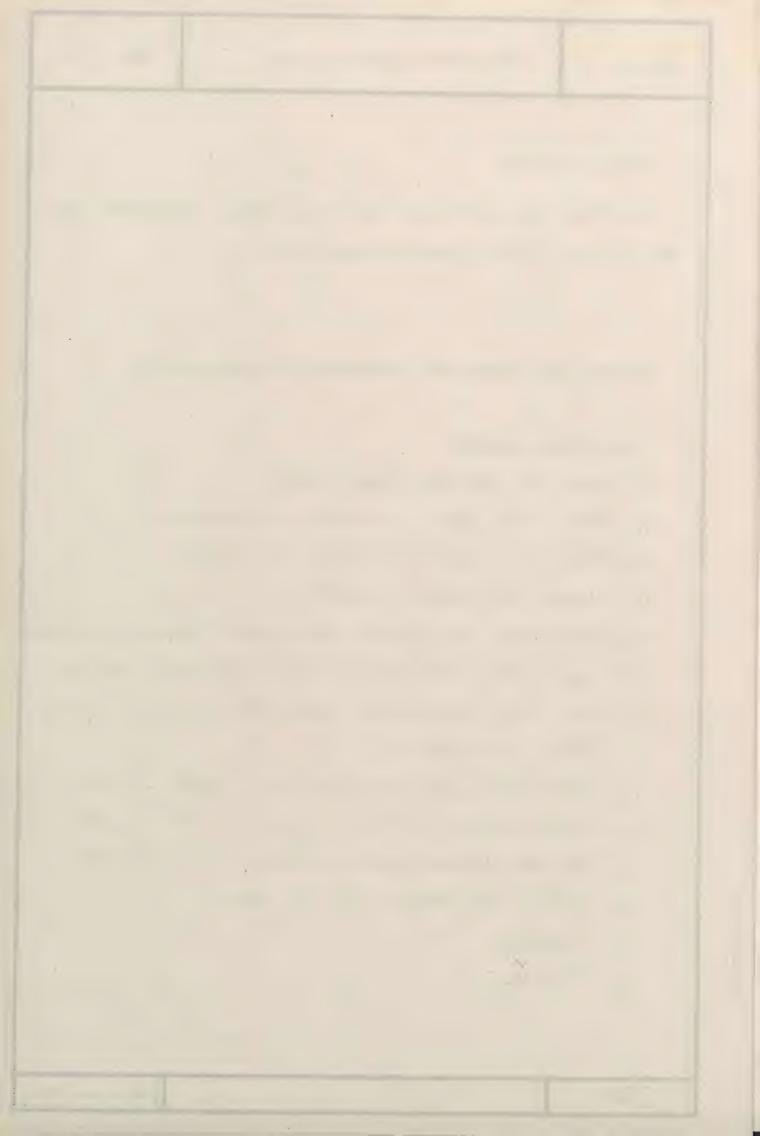
912 = Alturas extremas del contorno de la viotas I g II.

iz= bado del decagono regular, contorno de la vieta I.

k, = Apotema del poligono de ma cara,

S12 - Imperficie

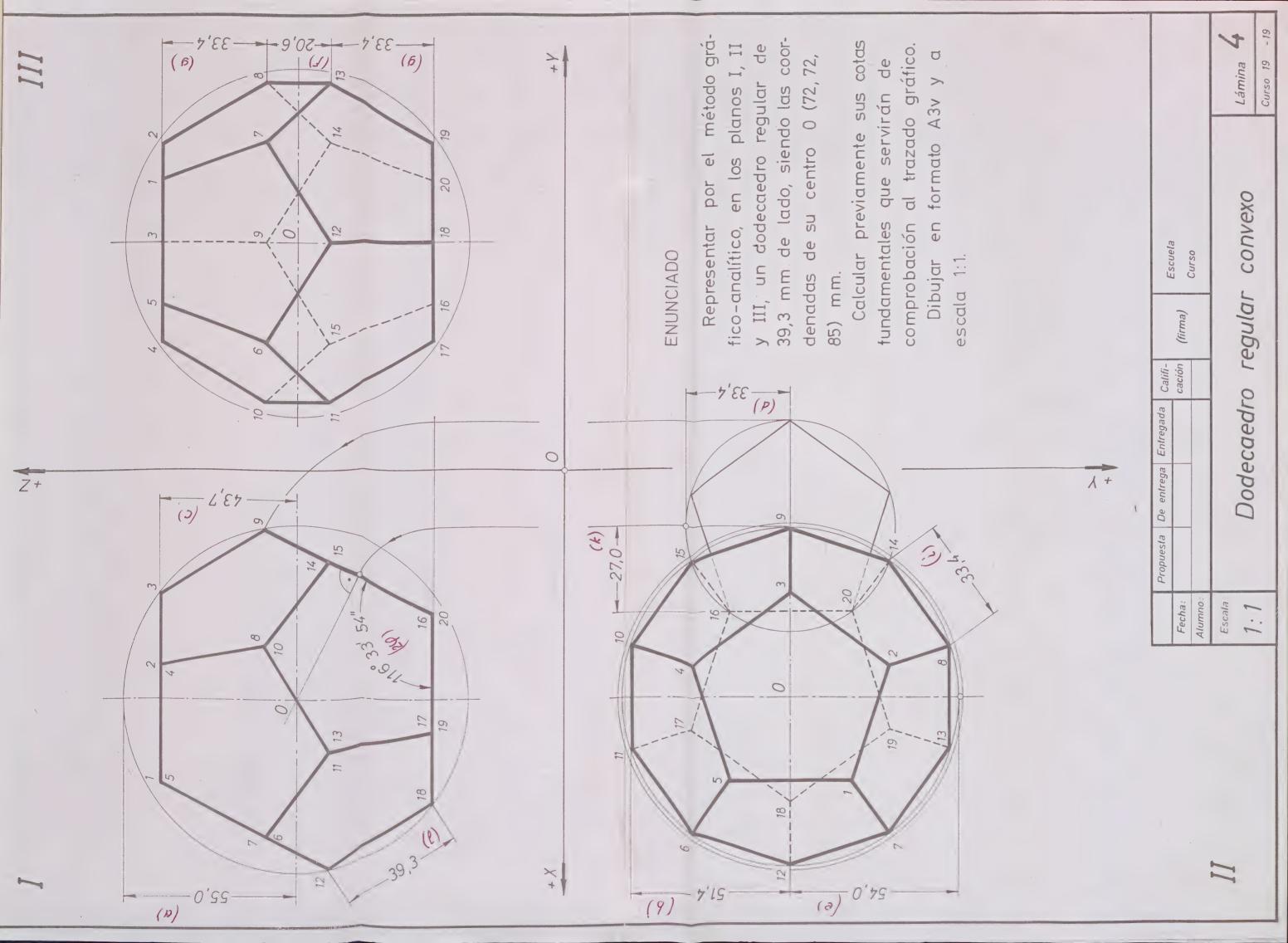
V12 = (Thumen.



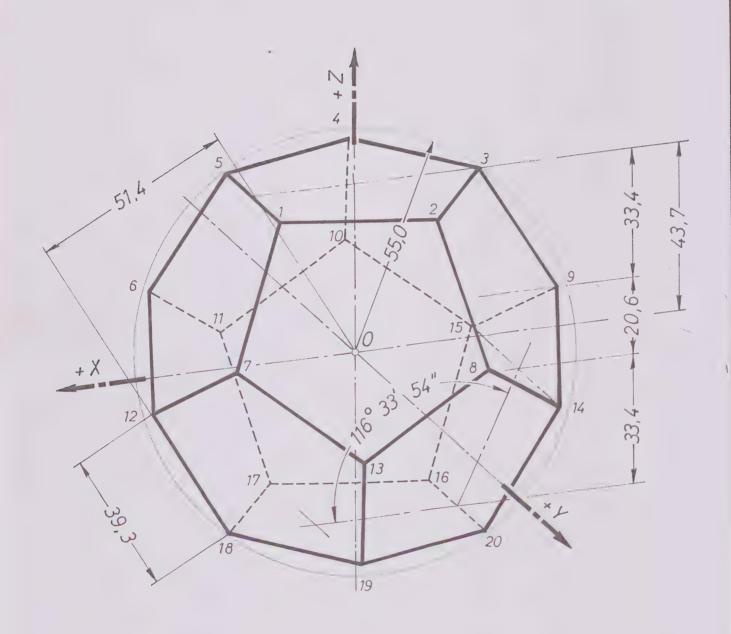
CUAPRO SINOPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado		
Q12	(30) VIS + V3 L12	1, 40 12 59 l ₁₂		
b 12	(31) $3 + \sqrt{5}$ ℓ_{12}	1, 30 90 17 {12		
C 12	$\sqrt{\frac{11\sqrt{5}+25}{40}} \ell_{12}$	1. 11 35 16 1/12		
d 12	$\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}} \text{fig.}$	0, 85 06 51 1/2		
2φ.	$Sen \ \varphi = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}$	sen 4 = 0,85 06 51 24 = 116° 33' 54.2"		
e 12	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} \ell_{12}$	1, 37 63 82 \(\ell_{12} \)		
f ₁₂	$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$ ℓ_{12}	0, 52 57 31 1/12		
912	(37) $\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$ ℓ_{12}	0. 85 06 51 \(\ell_{12} \)		
i 12	(38) $\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$ ℓ_{12}	0, 85 06 51 1,2		
k12	$(39) \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}} \ell_{12}$	0. 68 81 91 1,2		
S12	(40) $3 \times \sqrt{25 + 10} \sqrt{5} \ell_{12}^{2}$	20, 64 57 29 \(\ell_{12}^2 \)		
V ₁₂	$\frac{(41)}{4} \frac{7\sqrt{5} + 15}{4} \ell_{12}^{3}$	7, 66 31 19 $\ell_{,2}^{3}$		
(42) Relaciones entre magnitudes				
$e_{12} = 2 k_{12}$ $d_{12} = g_{12} = i_{12}$ $g_{12} + f_{12} = 2 k_{12}$				









Dodecaedro regular convexo



5

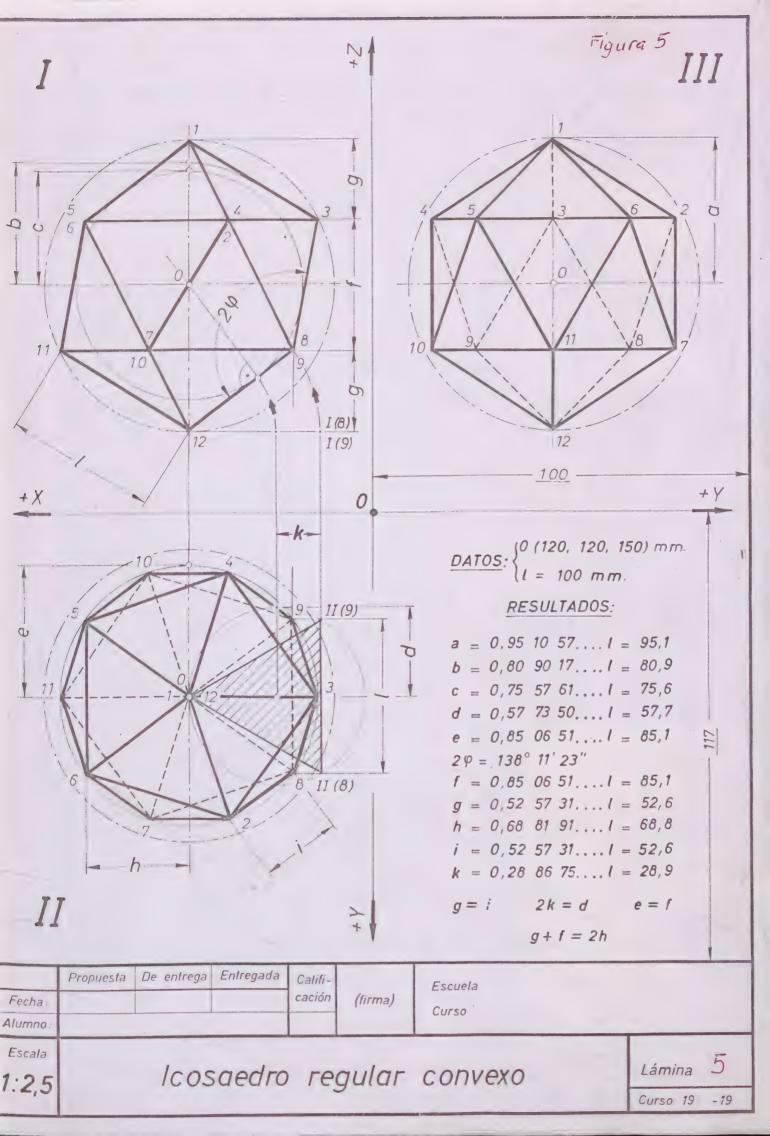
Lanine E

Emmerado:

Calcular presidente sus estas fundamentas que resvian de some torre de trasado carres. Deles en torresto A2 v a a cresta 1:1.

7 / 705 0 | 72, 52; mm.







PROCESO GRAFICO

El trasado gráfico ce inicia por el vértice insperior 12 (res figura nº 5) construyendo previamente en I el pantagono regular 7-8-9-10-11 cuyo lado cea de 57.8 mm., y completando la proyección I con el decágono que forma su contorno.

Con esta base, y mediante el giro de la cara abatida

I (8-9-12), abrede dor de un eje perpendicular a I y que pare

por 12, podemos completar las dos proyecciones restantes en I y II,

ya que el centro I (0) queda determinado fácilmente por la in
terrección con el eje I (1.12) de la perpendicular a la cara

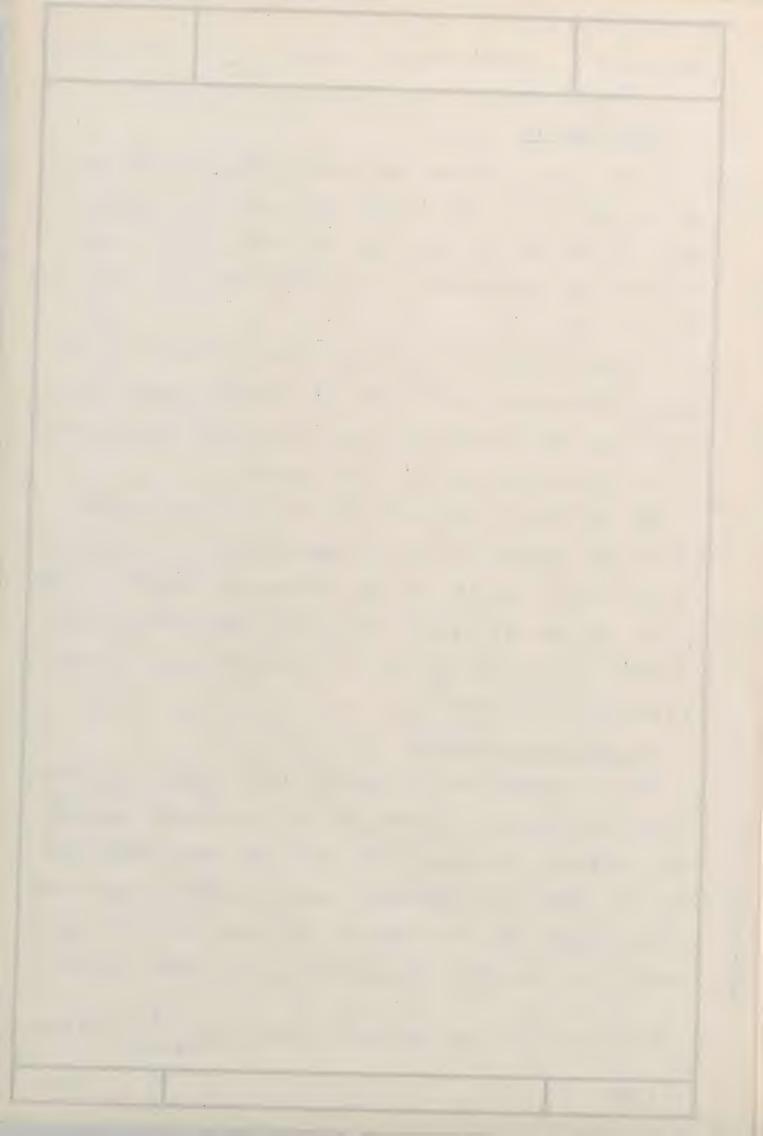
I (8-9-12) por ou centro.

PROCESO GRÁFICO-ANALÍTICO

Para la reduccion de los invertables errores gráficos, y facilita, al mismo tiempo el trasado, com su continuada com probacción, deberan calcularse previamente las magnificaes acetadas con letras en la figurea 5. monim la tabla correspondente.

La langitud del lado dado se ha fijado de forma que el radio a de la esfera circumscrita tenga el valor de 55 mm.

In dimension l, con seix decimales, serà: l= 55 = 57,83 03 93



in our serve tenderur:

29 - 1380 11' 23"

en estes values se militan las signiente relaciones:

FIGURA CORPORES

lateres de 57,2 mm de lado (dats del ejercicio).



RESUMEN DEL CALCULO DE MAGNITULES DE ESTE EJERCICIO

Nomen clatura em pleada

leo = bado del icosaedro dado (dato).

920 = Radio de la esfera circumscrita al icosaecho.

620 = Radio de la esfera tangente a las aristas.

C20 = Radio de la espera inscrita.

de = Radio de la sissemplacació incumerità al policono de una cara.

24 = Angulo rectilines del di do formado por da caras contiguas.

e₂₀ = Radis de la circumferencia circumscrita a un pentagono regular de lado l y también al decágono regular de lado i, contorno de la vista II.

1/20 = Altura intermedia del contorno de las vistas I , III.

920 = Alturas extremas del contorno de las vistas I g II.

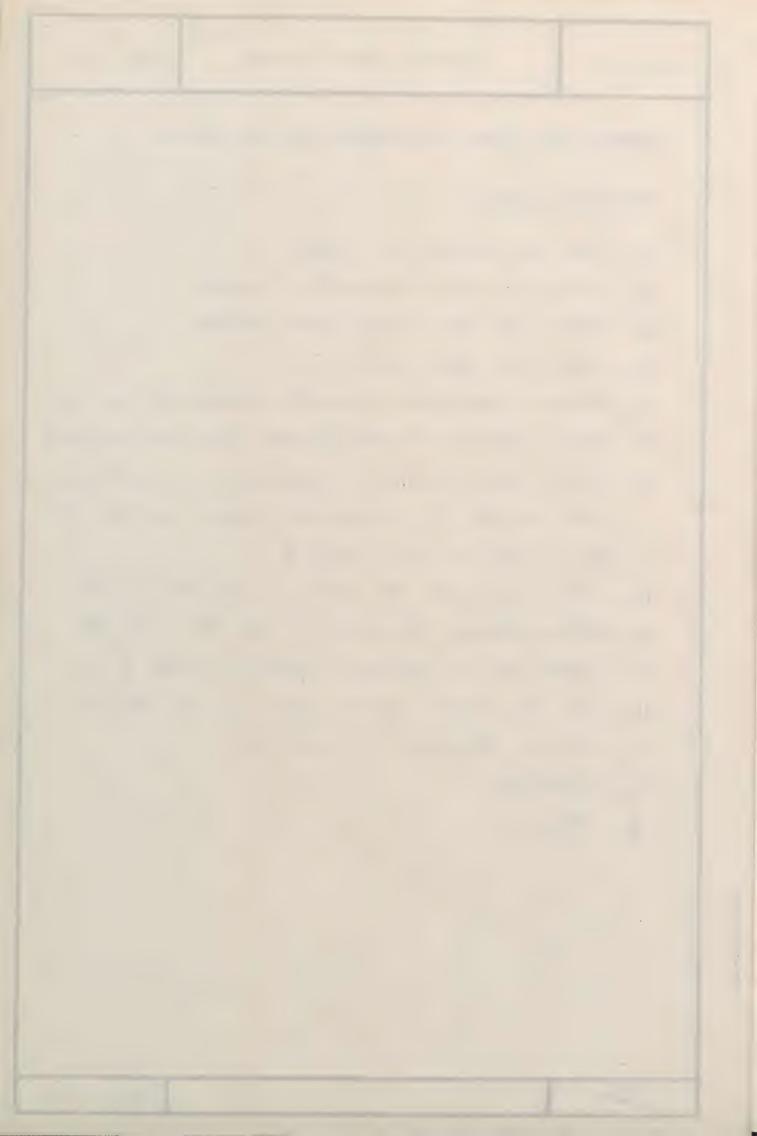
h20 = Spotema de un pentagones regular de lado !.

izo = bado del decágono regular, contorno de la vista I.

k20 = Apotenia del poligono de una cara.

Som Luper licie.

V20 = Wiliamin.

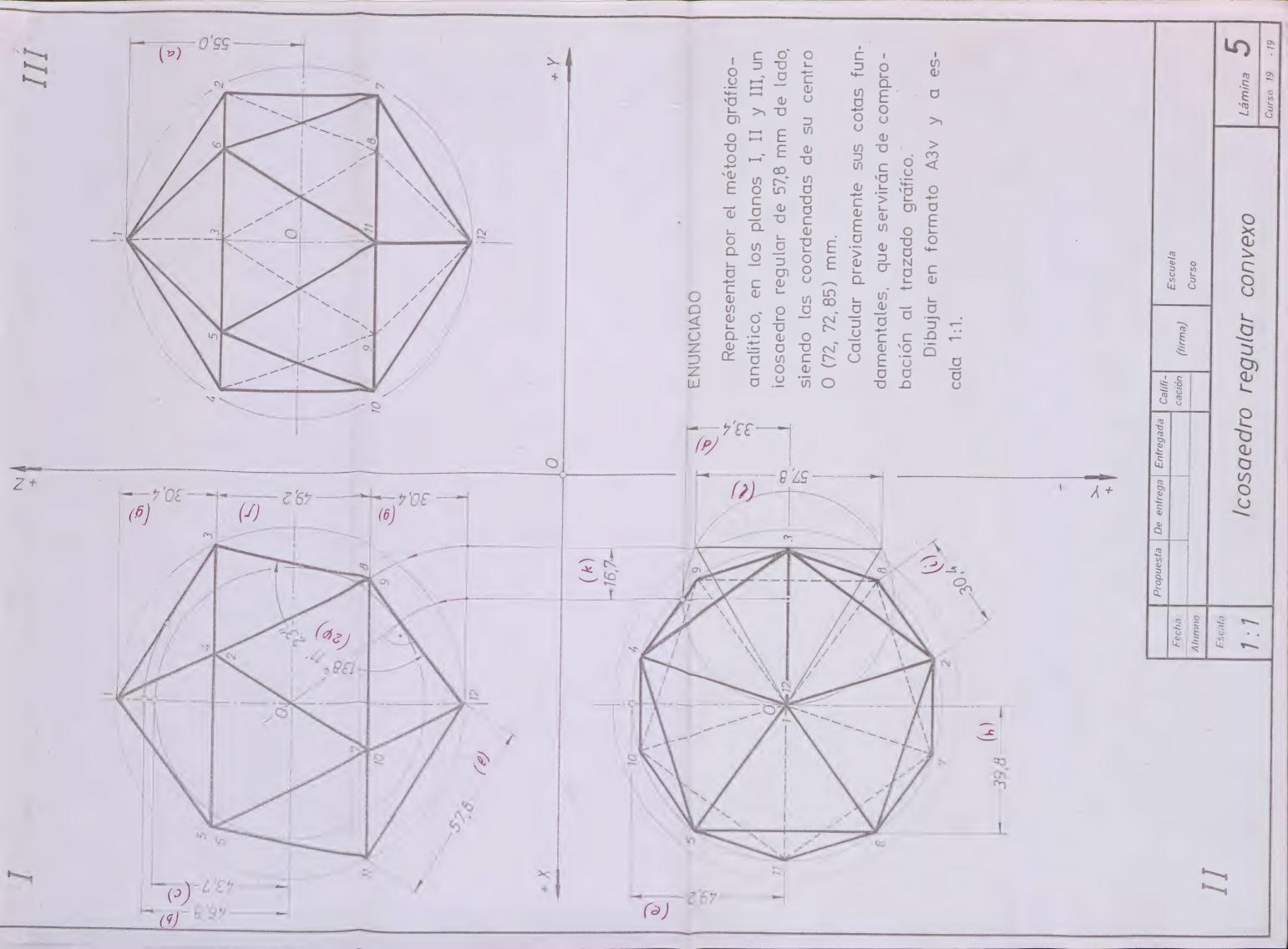


CUADRO SINOPTICO

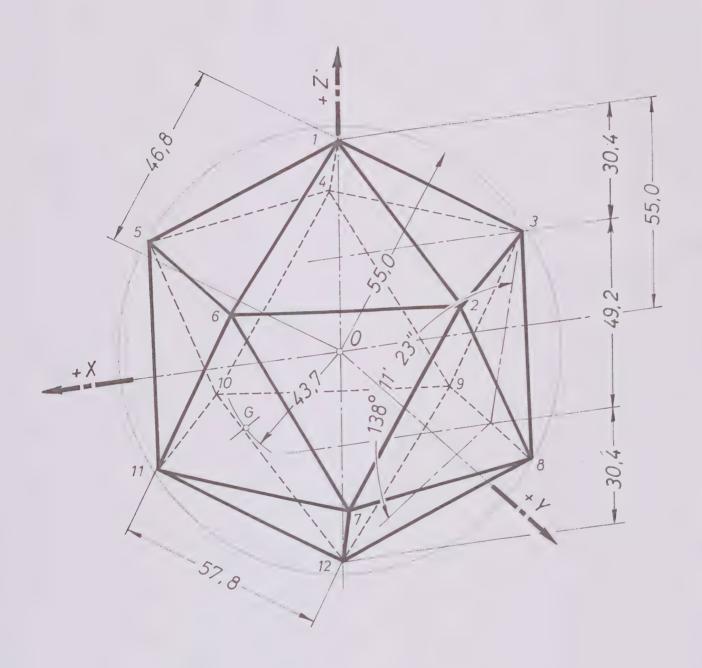
Magnitud	Valor exacto	Valor decimal oproximado		
a 20	$\frac{(43) \sqrt{10 + 2 \sqrt{5}}}{4} \ell_{20}$	0. 95 10 57		
b20	$\frac{(44)}{4} \frac{1+\sqrt{5}}{4} \ell_{20}$	0,80 90 17 820		
C20	$\frac{(45) \ 3\sqrt{3} \ + \sqrt{15}}{12} \ \ell_{20}$	0, 75 57 61 l ₂₀		
d 20	(46) <u>V3</u> 3 l ₂₀	0,57 73 50 l20		
29	$sen \ \varphi = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{6}$	Sen $\Psi = 0.93$ 41 72 2 $\Psi = 138^{\circ}$ 11' 22.8"		
e ₂₀	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$ \(\frac{1}{20}\)	0.85 06 51 120		
f ₂₀	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \ell_{20}$	0, 85 06 51 120		
920	$\sqrt{\frac{5-15}{10}} \ell_{20}$	0,52 57 31 l ₂₀		
h20	(51) $\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}} \ell_{20}$	0, 68 81 91 {20		
120	(52) $\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$ ℓ_{20}	0. 52 57 31 L ₂₀		
k ₂₀	$\frac{\sqrt{3}}{6} \ell_{20}$	0.28 86 75 l		
520	(54) $5\sqrt{3}$ ℓ_{20}^{2}	8, 66 02 54 (20		
	$\frac{(55)}{12} \frac{15 + 5\sqrt{5}}{12} \frac{1}{20}$	2, 18 16 95 (3		
(56) Relaciones entre magnitudes				
920 = 120	2k20 = d20 e20	= f20 9 = + f20 = 2 h20		

(3C-









Icosaedro regular convexo



6

Limine 6

ENUNCIONO

Reserve pro mi ma compagado de un tetraedro conjugado de un tetraedro necesar, esta de a man la compagado de un tetraedro les estas estas

aicular previamente sus cotas Jundamentalis, que ser ma la compensario a trasado gráfico.

Libertos en formato A3V , a conta 1:1.

UNE A4 210 X 297



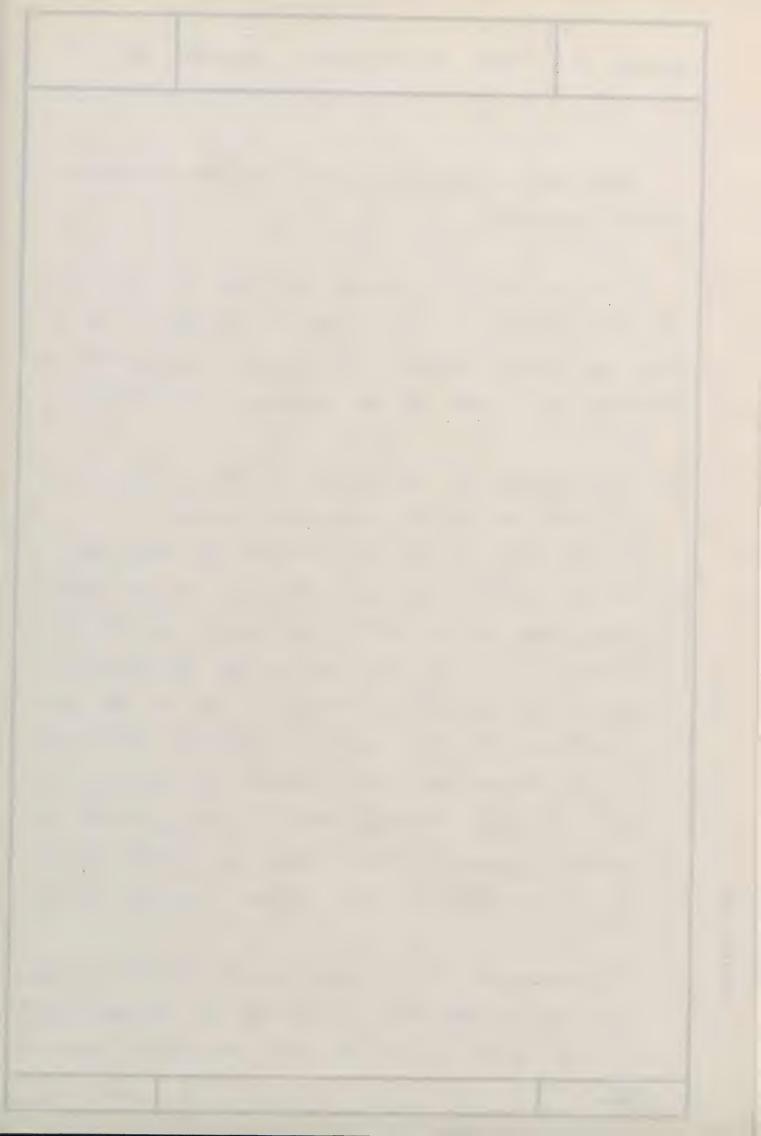
Definiciones y propiedades de la productiones: converces conjugados

L'unions an me promets rectilians la contri de dos caras contiguas de un poliedro regular P, se tétiene un miero poliedro P, llamado "conjugado del anterior, que gosa de las signientes propiedades:

El conjugado P' del poliedro regular convexo P. es tambien un poliedro regular convexo.

La efecto: a) Al estar situado los vértices de P' en lis centros de las caras de P, g ser este resnelar, didor vértices del P' perteneceran a la esfera inscrita en P, que rerà a su vez circumerita a P; b) siendo constante el dido formado por de caras contiguas de P, e ignales las apotemas de los poligomos de dichas caras, serà constante la distancia entre les centres de estes caral. Por consigniente, el poliedro convexo P' tiene todas sus anietas iguales y es inscriptible en una esfera, hiego es "cequilar"

2° El conjugado P' del policedro regular convexo P, tiene un mimero de vértices V'ignal al de caras C de P. En efecto, por un formación, al centre de cada ca-



de cara de D'e conservelle ... retien de P!

de mans de mas 6, vertice. V y aristas A de la cinco policitos requebres converto, es el signicate:

Poliedro regular	Caras	Vértices V	Aristas A
TETRAEDRO	4	4	6
EXAEDRO	6	8	12
OCTAEDRO	8	6	12
DODECAEDRO	12	20	30
ICOSAEDRO	.20	12	30

Así pues; y terriendo en cuenta las propiedades 1º y 2º, se verificara que:

- il pliedes compagado del tetracolo regular, tendra 4 vertices y por consigniente sera un TETRAE-DRO REGULAR.
- El poliedro conjugado del escaedro regular, tendra 6 vertices y por consigniente sera un OCTAEDRO REGULAR.
- El poliedro compregado del octardo o regados, tendra 8 vertices q por consigniente sera un EXAEDRO REGULAR.
- El poli des comingado del didecardo regular, ten--61



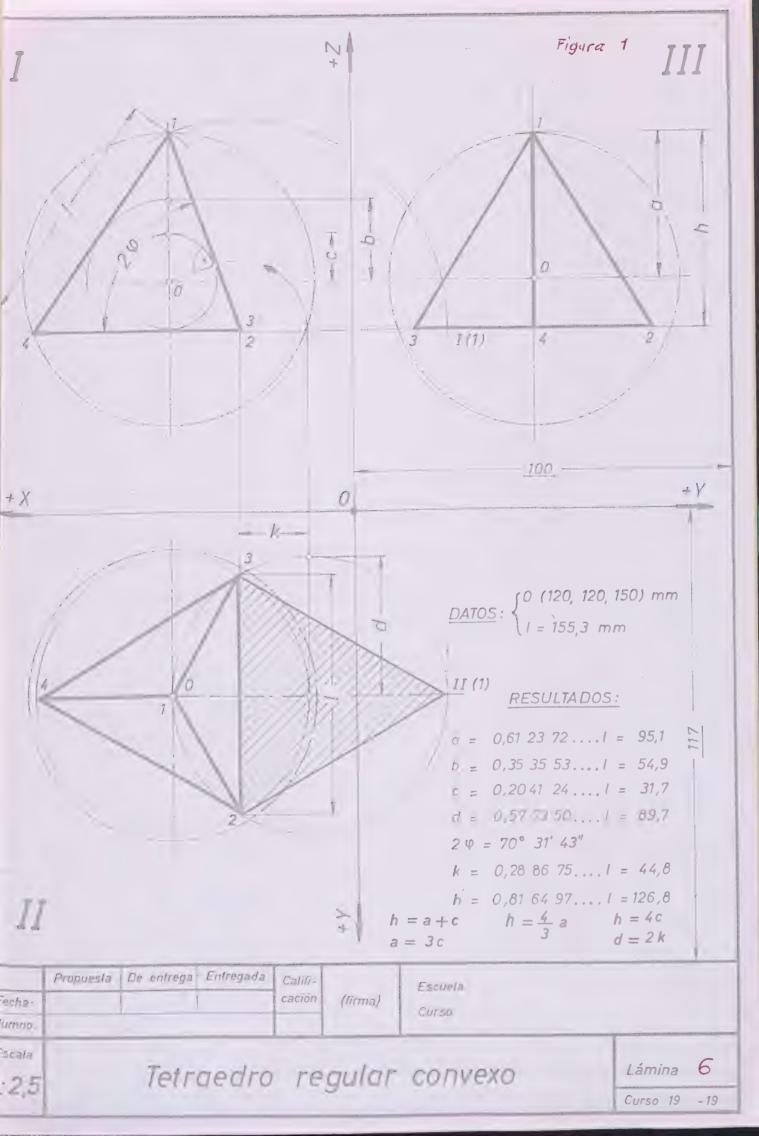
dra 12 m face 1 pro conservate sera un JCOSAEDRO REGULAR.

e) il pitato comperado del icracaso regulas, tendra 20 vertices y por consequente ma una una DODECAEDRO REGULAR.

Le la repuesto se deduci que el escaedro parta de nequelaces son mutuamente conjugados (cada uno lo 11 del otro). Ignalmente son mutuamente conjugados el dedecaedro e icosaedro cegulares. El tetraedro cegular es con. jugado de se mismo.

En las la mines 6 al 10 estudiarement la cepresentación de estos poliedros conjugados, así como el estudio ana. lítico de las magnitudes del conjugado en funcion de las del poliedes dado.







UNE A4 210 X 2

PROCESO GRÓFICO

De terminar previamente el lado del tetracche regular, en función del radio a de la espera contrata la presenta que lico-analitico de la la. espera la lan la sera:

Comando como punto de partida este lado, representar el tetracetro dato, de acuerdo em el proceso marico de la cum cionada lamima 1: Esta representación se hará en los placros I, II g III.

La apresentación del letracción compregado se hará unicado los centros de las caras del tracción primetero, los cuales están aituados en el espació, en el taricentro de un casas
cuspertiras i tenno de intersección de las anedeanas); como esto propiedad se conserva en sus proyeccerses, es posible detercionas en cada nono de los planos I, II y II, las proyecciones de los centros de las caras, vertices del policidos pedido.

el bariculto de un tria quis esta esta malquier medioma a des tercies de un longitud a partir del vértice correspondiente.

Una comprobación de este trazado es la correspon-



tenerre estos imdependientemente en cada proyección.

Este tracado es laboriero y falto de precision, por le que on conveniente simplificarlo con el proceso grafico - analítico.

PROCESO GRÁFICO - ANALÍTICO

Para la reducción de los errores de trasado, mos serviremos de cotas analíticas calculadas previamente en la forma que a continuación expenente.

Observers previamente que la estra imscrita en el tetras
dro dado, es concentrica con la circumscrita, siendo aquilla a
su ver tangente a
clas caras del mismo en sus centres aespectivos. Por anniquiente calcularemes previamente el radio de la esfera inscrite al tetracdro dado, que rerá el de la circumscrite
del tetracedro conjugado.

Dai pues, teniendo en cuenta el cálculo de la lámina.

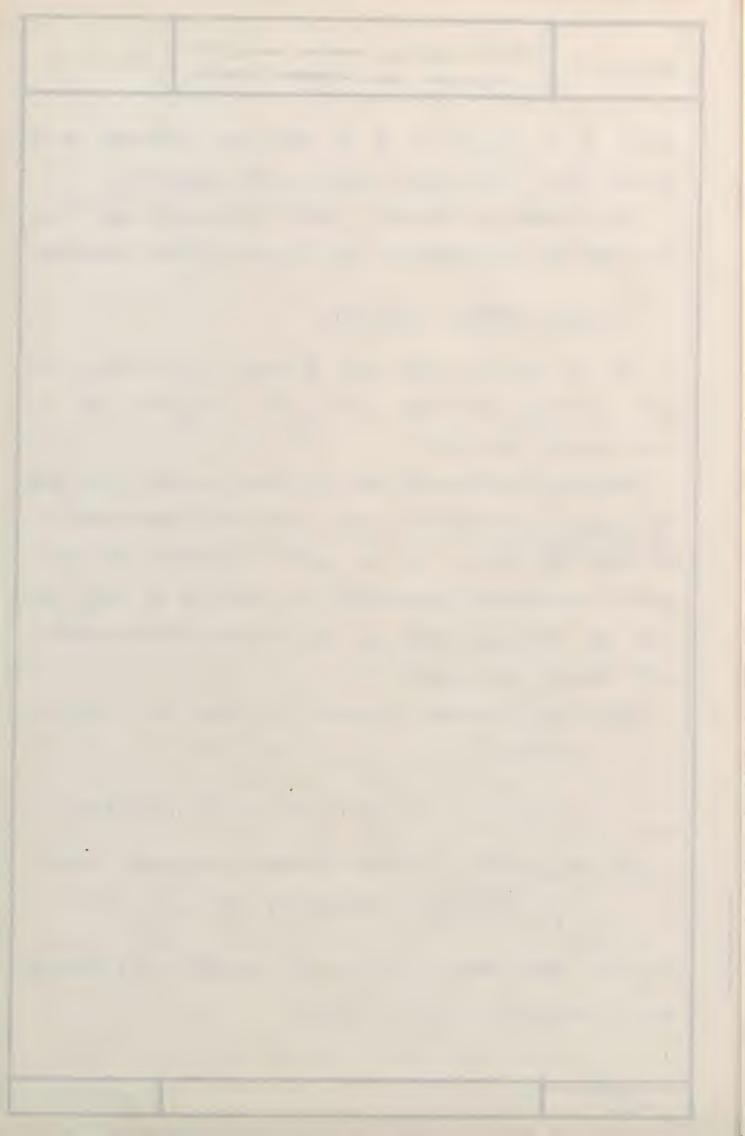
C4 = a' = 0.20 21 24 x 89,81 46 88 = 18, 33 33 34 = 18,3 mm,

y por consigniente el lado del Tetractio conjugado valdrá:

l' = 18,33 33 34 = 29,93 82 30 ≈ 29,9 m m

que se expresau a continuación:





$$a'_{4} = 0.61 23 22 = 29.93 22 30 = 18.3 mm$$
 $b'_{4} = 0.25 35 52 = id. = 10.6 ...$
 $c'_{5} = 0.20 4! 24 = 2.6 = 6.1 ...$
 $d'_{5} = 0.57 73 50 \times 24 = 17.3 ...$
 $2 = 40 31 43 ...$
 $b'_{5} = 0.28 26 75 \times 24 = 8.6 ...$

$$k'_{4} = 0.28 \text{ 36 } 75 \times \text{ id} = 8.6 \text{ w}$$

$$k'_{4} = 0.81 \text{ 64 } 97 \times \text{ id} = 24.4 \text{ id}$$

Con estos valores se variante las signientes celaciones:

$$h'_{1} = a'_{1} + C'_{4} = 24, 4 = 18.3 + 6.1$$
 $h'_{2} = \frac{4}{3}a = \frac{4 \times 18.3}{3} = 24.4 \text{ mm}.$

$$h'_{4} = 4c'_{4} = 24.4 = 4 \times 6.1$$
 $a'_{4} = 3c'_{4} = 18.3 = 3 \times 6.1$

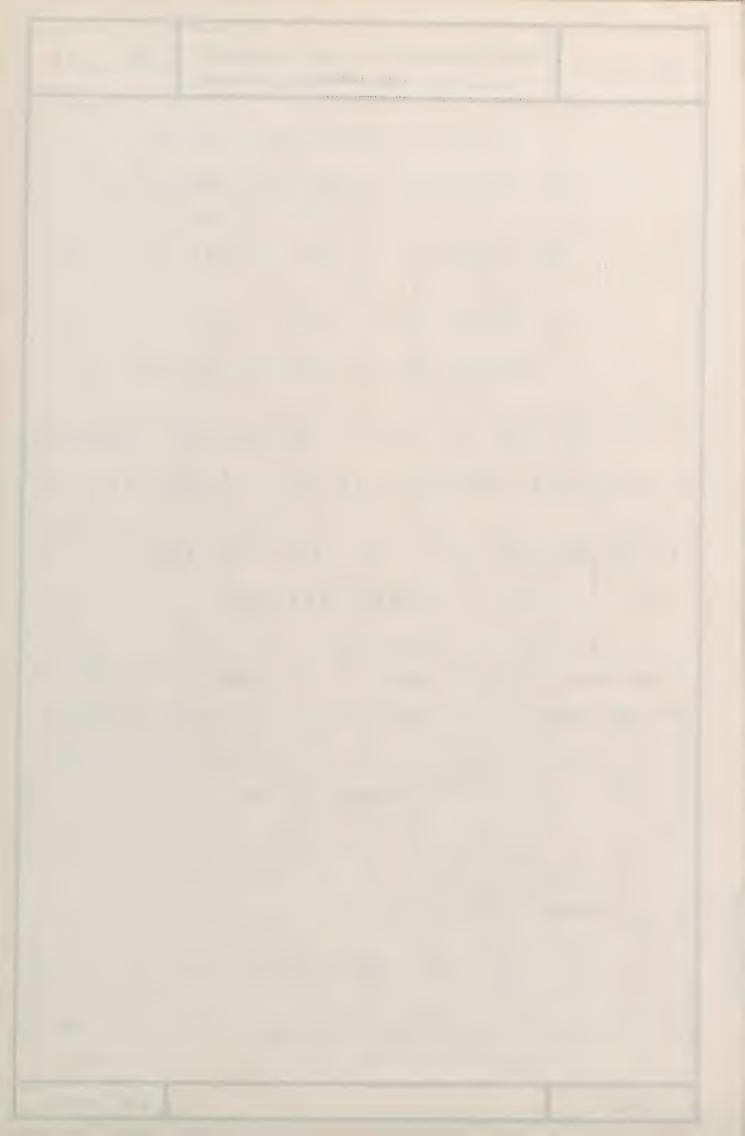
ba relacion entre los eadies de las esferas circumscritas el tetraedro dado y al conjugado de inte, será la mesma que la escistente entre los radios de las esferas circumscrita e inscrita a un mismo tetraedro. Estos valores son:

$$a = \frac{\sqrt{6}}{4} \ell_{h} \qquad c_{h} = \frac{\sqrt{6}}{12} \ell_{h}$$

g por consigniente:

$$\frac{a_{4}}{a_{4}^{\prime}} = \frac{a_{4}}{c_{4}} = \frac{\sqrt{6}}{4} \ell_{4} : \frac{\sqrt{6}}{12} \ell_{4} = 3$$
 [1]

El lado l'4 del tetracoles conjugado. en función del la-



[2]

do 1, dado, una pues

$$a_4 = \frac{\sqrt{6}}{4} \ell_4$$
; $c_4 = \alpha'_4 = \frac{\sqrt{6}}{12} \ell_4$

$$2_{4}^{\prime} = a_{4}^{\prime} : \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{6}}{12} l_{4} : \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{1}{3} \ell_{4}$$

g la relación entre los lados de ambos poliedos signe aiend

$$\frac{\ell_{\mu}}{\ell_{\mu}'} = 3$$
 [3]

FIGURA CORPOREA

Le oblique el tetracedos conjugado por acoplariento de 4 traducation equilaters de 29,9 mm de lado, situade interiormente en etro tetraccio regular formació por á caras trianquearis (transparentes) de 89,8 n.m. de lado, de forma que los vértices del primero estera en los centros de las caras del segundo.

RESUMEN DEL CALCULO DE MAGNITUDES DE ESTE EJERCICIO

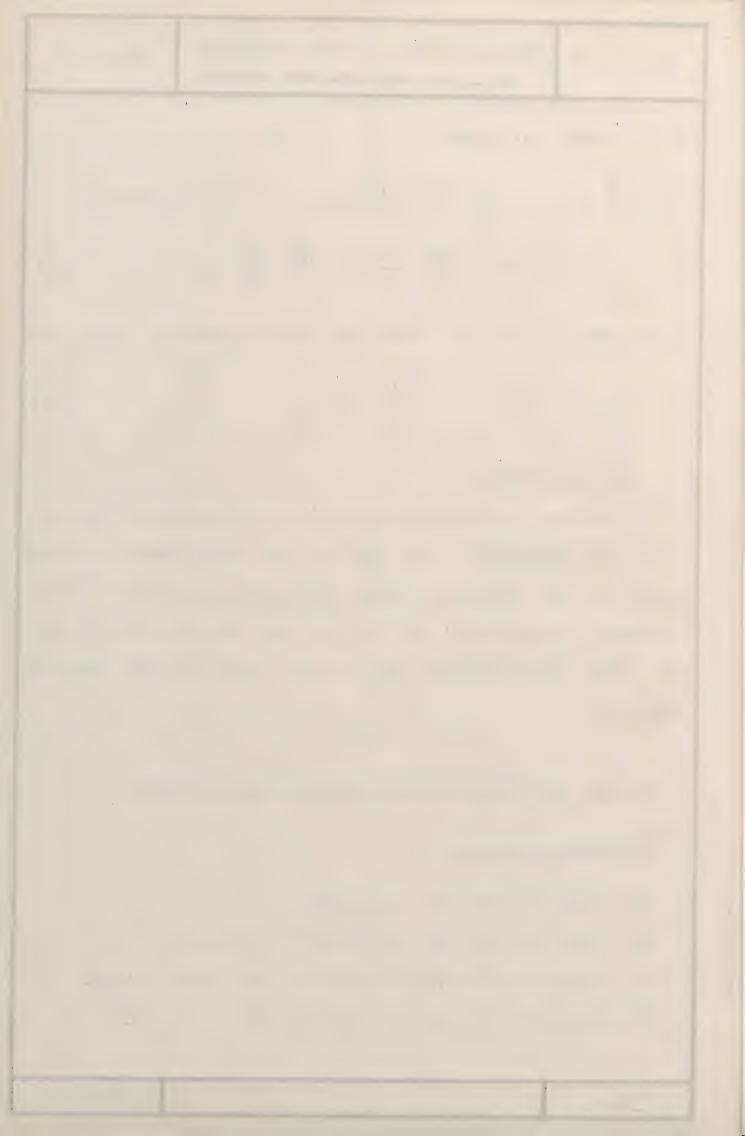
Nomen clatura empleada

l' = bado del tetraedro conjugado.

0' = Radio de la esfora circumscrita al mismo.

b' = Radio de la esfera tangente a las aristas del id.

C' = Radio de la esfera inscrita al id.



d's = Radio de la circumferencia circumscrita al poligono de una cara del sid.

24 = Angulo rectilines del diedes formado por con caras con-

k' = Apotema del poligono de una cara del id,

h' = Altura del tetraccho id.

S' = Inperficie del id.

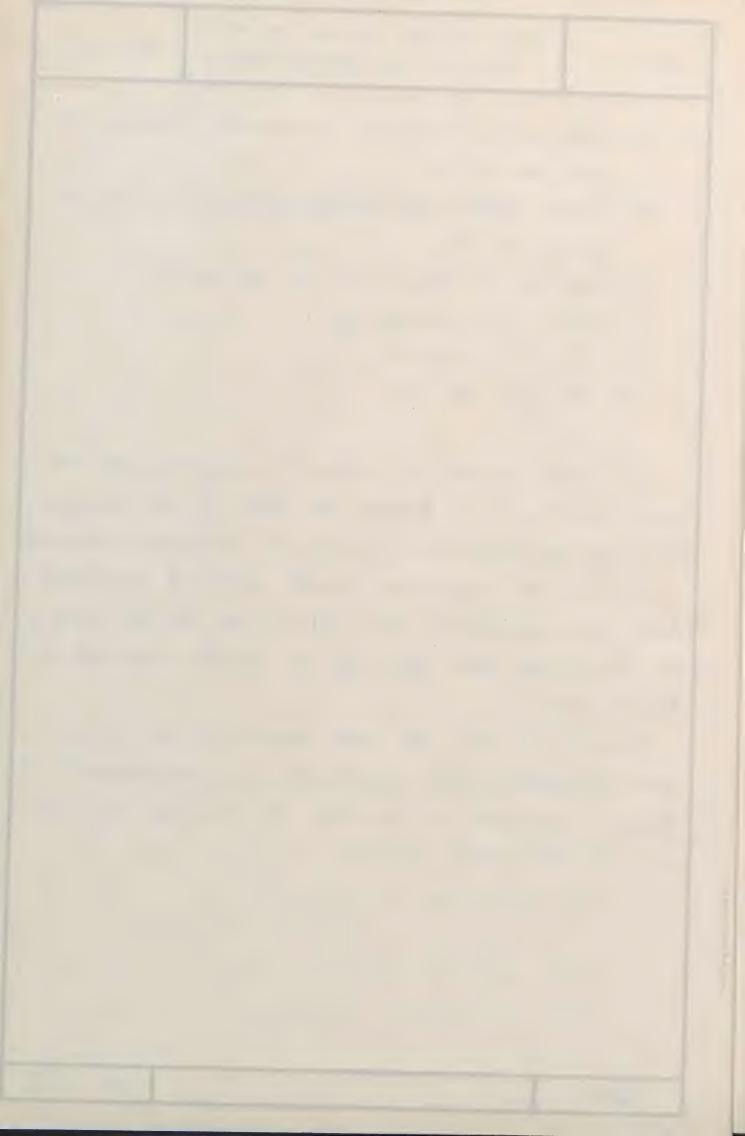
V' = Volumen del id.

dado, ya que consciences del tetracedio compregnedo pueden iltemerre directamente en funcion del lado la del tetracedio
dado, ya que consciences la nascin de semejanza de ambos.

Ani pues, las magnitudes lineales rerán \(\frac{1}{3}\) de las del
dado; las superficiales serán \((\frac{1}{3}\))^2 = \frac{1}{9}\) de las del dado, y
las velumetricas rerán \((\frac{1}{3}\))^3 = \frac{1}{27}\) de las del menegonado te
tracedos dado.

bomando los valores del cuadro simóptico de la lamina 1..

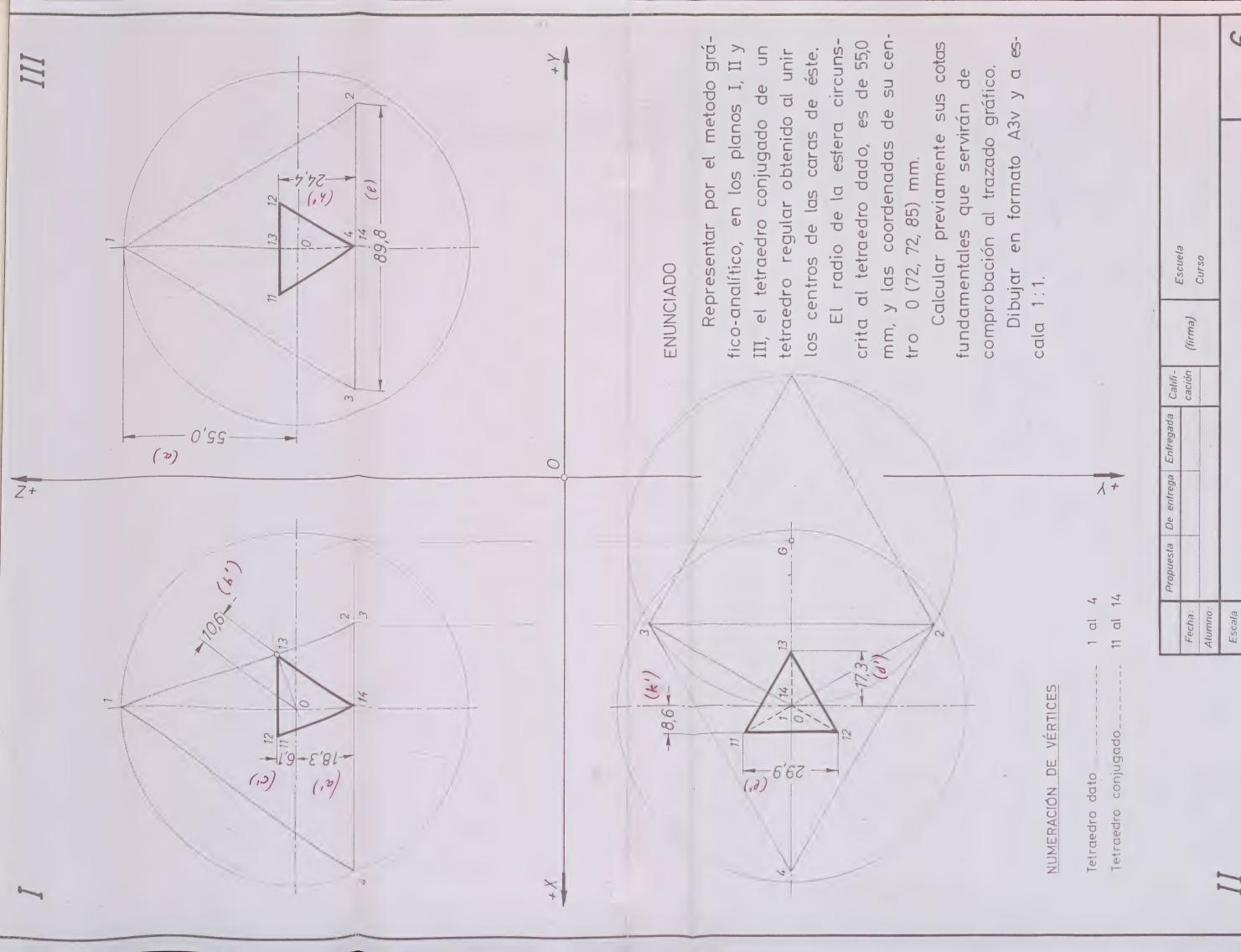
para el tetracdro dado, se obtendian los correspondentes al tetracdro compregado en funcion de la que recessión en mos en el cuadro signiente.



SUADRO SINGATICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado		
L' ₄	(56) 1/3 l4	0. 33 33 33 l ₄	-	
Q'4	(57) V6 14	0. 20 41 24 &4	۸.	
b' ₄	$\frac{\sqrt{2}}{12} \ell_4$	0, 11 78 51 lu	4	
C'4	(59) <u>V6</u>	0,06 80 41 l4	1	
d'4	(60) V3 84	0, 19 24 50 84	1.	
2 Ψ	(61) ser $\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$	sen $\theta = 0.577350$ 2 $\theta = 70^{\circ}31'43.4"$	ΪX	
k'4	(62) V3 L4	0.09 62 25 l4	-	
h'4	(63) <u>V6</u> & u	0, 27 31 66 lu	₩.	
54	(64) 13 84	0, 19 24 50 12	4-	
V'4	(65) $\frac{\sqrt{2}}{324}$ ℓ_4	0.00 43 65 \$ 2	+	
(66) Relaciones entre magnitudes				
$l_4: l_4' = 3$ $S_4: S_4' = 9$ $V_4: V_4' = 27$				





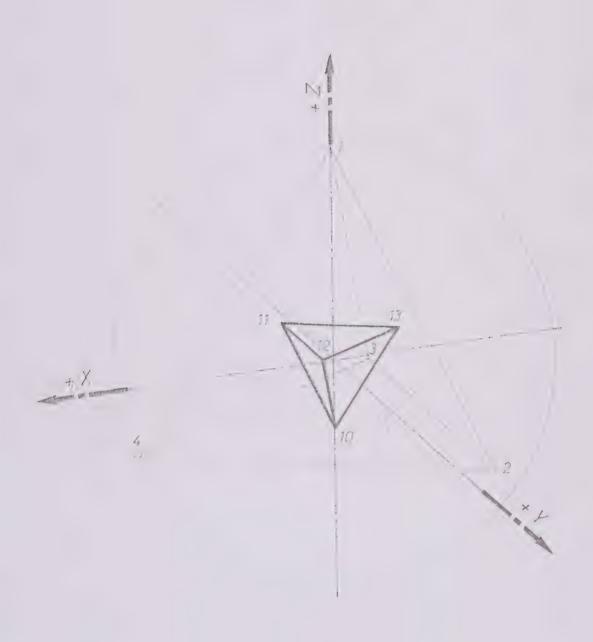
Poliedros regulares convexos conjugados

Lámina Curso 19

9







Poliedros regulares convexos conjugados



Lamina 7

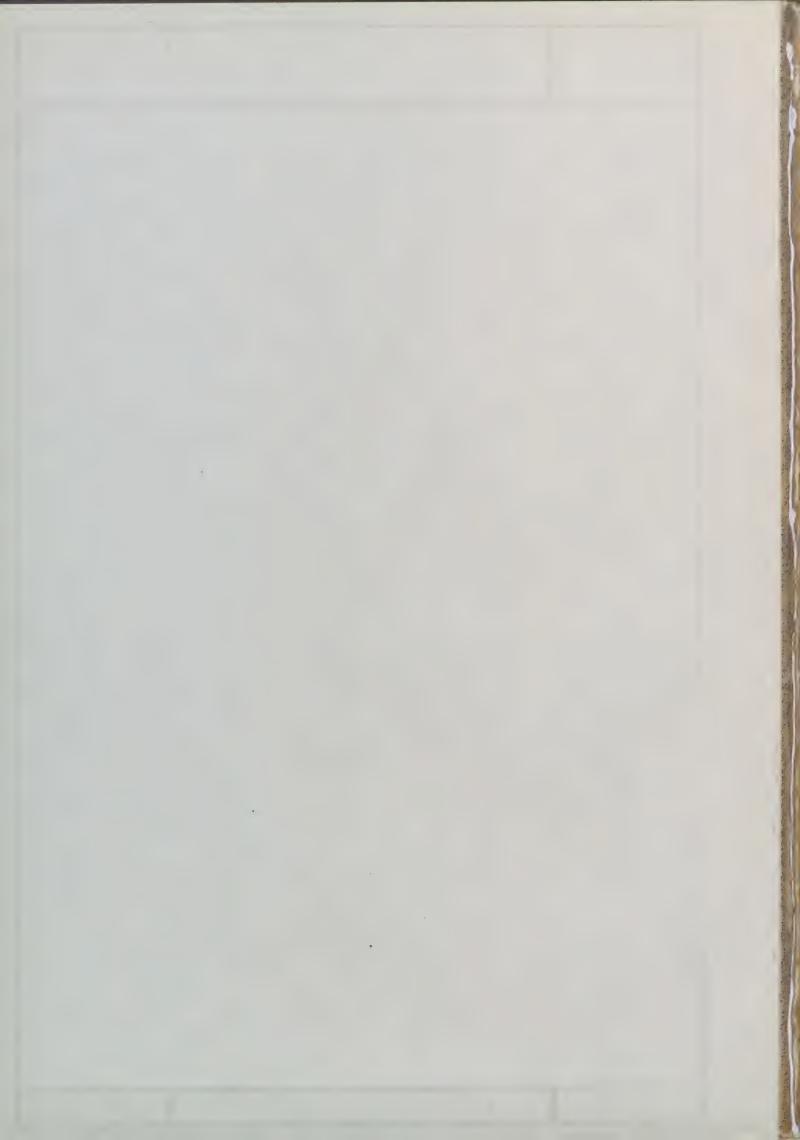
ENUNCIADO

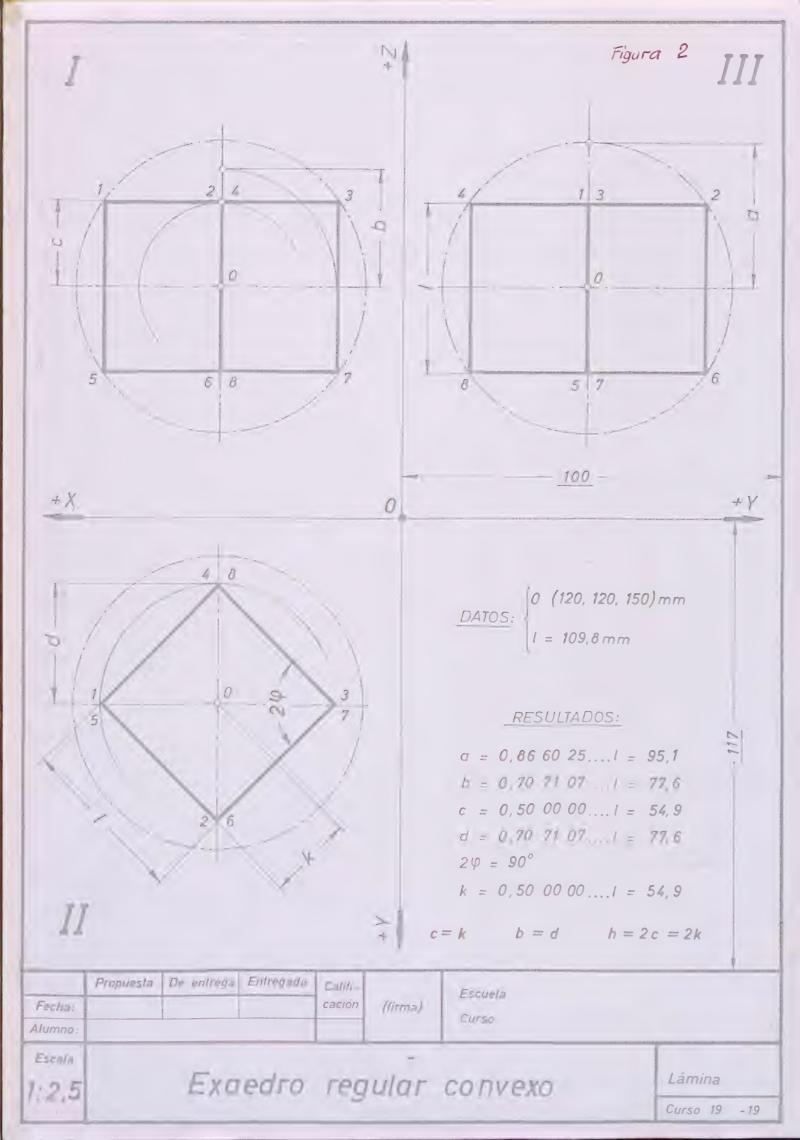
Petroster par el actudo quincia aunitico, en los planos. I, II y II, el ostardo cenjugado de un exaedro regular, oftenido at unia los centres de las caras de iste.

El radio de la esfera circumscrita al exactro de se es de 55,0 mm, y las coordenadas de su centro 0 12.

Calcular previamente sus estas fundamentais, que serviran de comprobación al trasado gráfico.
Dibujar en formato A3V y a servia 1:1.

DATOS $O(72, 72, 85)_{mm}$ a = 55, 0 mm







PROCESO GRAFICO

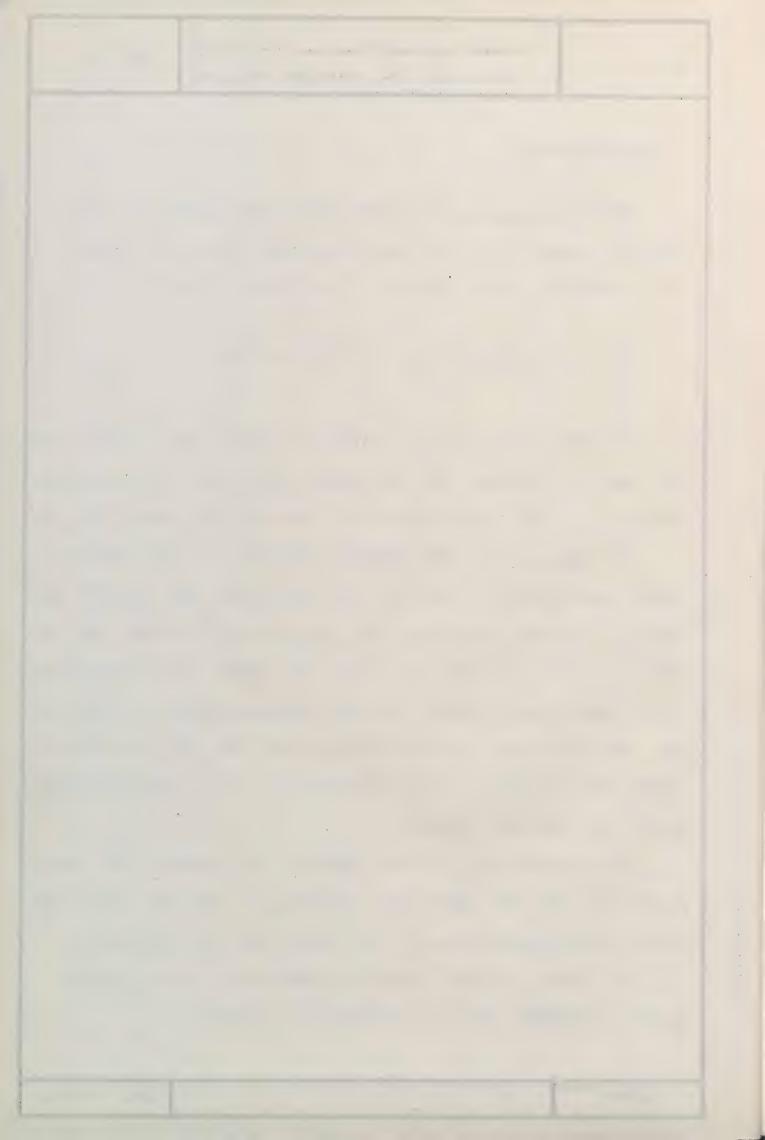
Detorminar presiamente el lado del exactos regular, en frencion del radio a de la espera circumscrita l'en para co-analitico de la lanima 2); el lado 1 será:

Emando como punto de partide este lado, representar el exaldro dato, de acuerdo con el proceso gráfico de la mencionada lamina 2. Esta representación ce hará en los planos I, II q III.

La representación del octardo conjugado se hará determimando preniamente los centros de cada cara del eraedro primitivo, terriendo presente que las proyecciones de cada uno de elles son a su ves centres de les rectangules o cuadrades de las caras proyectadas. Invendo adecuadamento las proyeccio mes de estos centros se obtendrá en cada uno de los planos coordenades I, II g III, la representación del octardos compregado del exacto dado.

Una comprobación de este trasado es la verificar la corresponderues de las projecciones del centre de cara cara tetecidas independientemente un cada plane de proposeron.

El hasado auterior puede simplificarse con el proceso gráfico-amalítico que a continuación exponemo.



PROCESO GRAFICO - ANALÍTICO

Para la ceducción de los errores de trasado, mos serviremos

de cotas analíticas calculadas prenamente de la forma signante.

Observernos previamente que la esfera inscriba en el exaeaindo aquilla a su vez,
dro dado, es concentresa con la astrumenteta, tampente a las sucas del mismo en sus centros cespectivos. Por consigniente,
calcularemes persamente el cado de la esfera inscrita al
ernedos dado, que sera la circunscrita al estados conjugate.

Sei pues, y teniendo en cuenta el calculo de la lamima 2º, se verificará:

 $C_6 = \alpha_8' = 0.5 \times 63$, 50 85 60 = 31, 75 42 80 = 31, 75 mm.

y por consigniente, el lado del cetaedo conjugado, valdea:

demis calcular les métantes del estrectes que de expresser a continua-

 $a'_{g} = 0.70 \ 71 \ 07 \times 44,90 \ 73 \ 19 = 31.8 = 11.8 = 11.8$ $b'_{g} = 0.50 \ 00 \ 00 \times id = 22.45 \times 11.8$ $c'_{g} = 0.40 \ 82 \ 48 \times id = 18.3 \times 11.8$ $d'_{g} = 0.57 \ 73 \ 50 \times id = 25.9 \times 11.8$ $2 \ 9 = 109^{\circ} \ 28' \ 16' = 109^{\circ} \ 28' \ 18'$



kg = 0,28 86 75 x 44, 90 73 19 = 13,0 mm.

con estos valores ne verifican las signantes relaciones:

La relación entre los eadios de las esferas circumeritas al exactes dado y al conjugado de este, com la misma que la exestente entre la cada de las esforas circumscria e inscrità al escaedio dado, cuyos valores non:

$$a_6 = \frac{\sqrt{3}}{2} l_6$$
 $c_6 = \frac{1}{2} l_6$

2 pt convergence to:

$$\frac{a_6}{a_8'} = \frac{a_6}{c_6} = \frac{\sqrt{3}}{2} l_6 : \frac{1}{2} l_6 = \sqrt{3} = 1.73 \ 20 \ 51 - [1]$$

El lado l'8 del octardos conjugado, en tuncione del rado la del exactio dado, sera pues

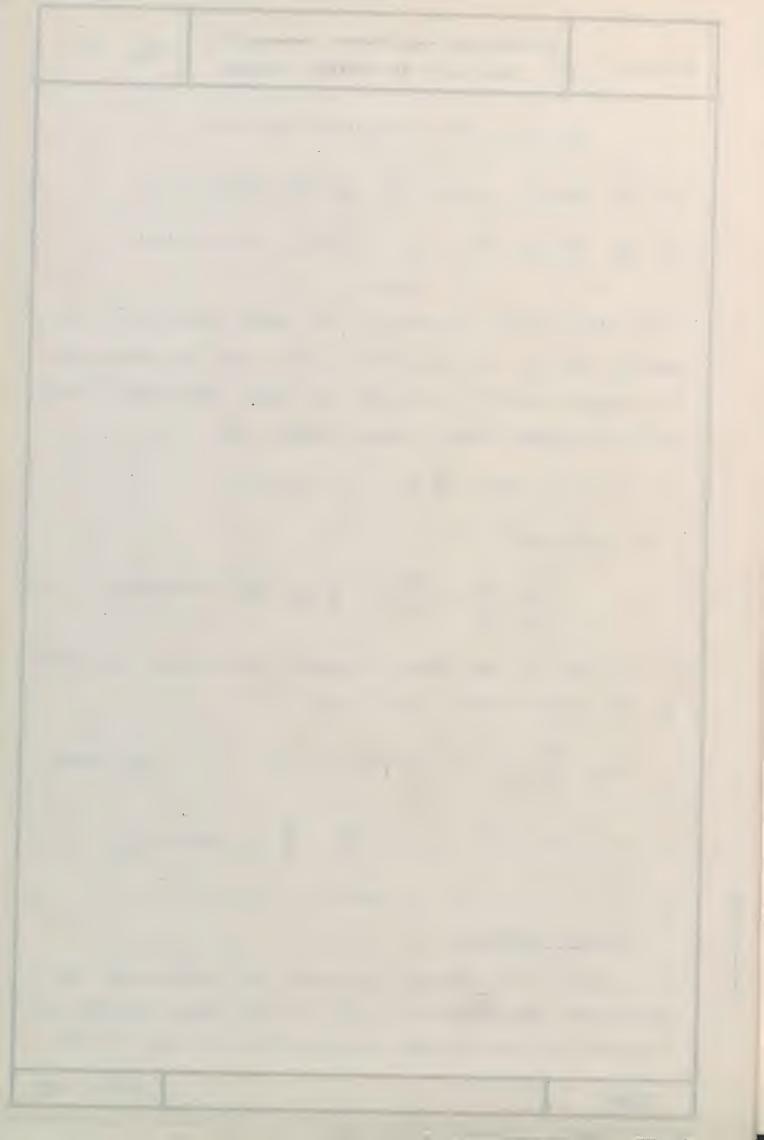
$$a_6 = \frac{\sqrt{3}}{2} l_6$$
 $c_6 = a_8' = \frac{1}{2} l_6$

de donde

$$\ell_g' = a_g' : \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \ell_e : \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \ell_e = 0.707107. \ell_e$$
 [2]

FIGURA CORPOREA

Le obtiene el ostardo comprendo por aciramiento as 8 treangules equitations de 12.9 n. m de lado, astrentes interiormente en un esaedro acquelar formado por 6 caras



RESUMEN DEL CÁLCULO DE MAGNITUDES LE ETE ELECTRO

Nomenclatura empleada

l'g = bado del octaedro conjugado

a's = Radio de la esfera circumscrita al miemo

b's = Radio de la esfera tangente a las aristas.

C'8 = Radio de la esfera inscrita

d's - Ratio de la circumferencia circumscrita al poligono de una casa

24, = Angulo rectilines del diedro formado por dos caras ou.

kg = Apotema del poligono de ma cara.

S' = Superficie.

V'g = Wilamou.

As valores anteneres del octardos conjugado, pueden ellemos de del comede dado, per de valor conocido de l'g en funcion de l_6 (ver formula [2]), es $l'_8 = \frac{\sqrt{2}}{2} l_6$



Lustiluyendo este valu ou las formulas 21 a 28 de la lamine.

3, tendrous:::::

$$a_{g}^{\prime} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \ell_{G} = \frac{1}{2} \ell_{G}; \quad b_{g}^{\prime} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \ell_{G} = \frac{\sqrt{2}}{4} \ell_{G};$$

$$c_8' = \frac{\sqrt{6}}{6} \times \frac{\sqrt{2}}{2} l_6 = \frac{\sqrt{12}}{12} l_6 = \frac{2\sqrt{3}}{12} l_6 = \frac{\sqrt{3}}{6} l_6; \quad d_8' = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} l_6 = \frac{\sqrt{3}}{6} l_6; \quad d_8' = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} l_6 = \frac{\sqrt{3}}{6} l_6; \quad d_8' = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} l_6 = \frac{\sqrt{3}}{6} l_6; \quad d_8' = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} l_6 = \frac{\sqrt{3}}{6} l_6; \quad d_8' = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} l_6 = \frac{\sqrt{3}}{6} l_6; \quad d_8' = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} l_6 = \frac{\sqrt{3}}{6} l_6; \quad d_8' = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} l_6 = \frac{\sqrt{3}}{6} l_6; \quad d_8' = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} l_6 = \frac{\sqrt{3}}{6} l_6; \quad d_8' = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} l_6 = \frac{\sqrt{3}}{6} l_6; \quad d_8' = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} l_6 = \frac{\sqrt{3}}{6} l_6; \quad d_8' = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} l_6 = \frac{\sqrt{3}}{6} l_6; \quad d_8' = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} l_6 = \frac{\sqrt{3}}{6} l_6; \quad d_8' = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} l_6 = \frac{\sqrt{3}}{6} l_6; \quad d_8' = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} l_6 = \frac{\sqrt{3}}{6} l_6; \quad d_8' = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} l_6 = \frac{\sqrt{3}}{6} l_6; \quad d_8' = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} l_6 = \frac{\sqrt{3}}{6} l_6; \quad d_8' = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} l_6 = \frac{\sqrt{3}}{6} l_6; \quad d_8' = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} l_6 = \frac{\sqrt{3}}{6} l_6; \quad d_8' = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} l_6 = \frac{\sqrt{3}}{6} l_6; \quad d_8' = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} l_6 = \frac{\sqrt{3}}{6} l_6; \quad d_8' = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} l_6 = \frac{\sqrt{3}}{6} l_6; \quad d_8' = \frac{\sqrt{3}}{3} l_6 = \frac{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{6} \ell_{6}; \qquad k_{8}' = \frac{\sqrt{3}}{6} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \ell_{6} = \frac{\sqrt{6}}{12} \ell_{6}; \qquad S_{8}' = 2\sqrt{3} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \ell_{6}\right)^{2} =$$

$$= 2 \sqrt{3} \times \frac{1}{2} \ell_{6}^{2} = \sqrt{3} \ell_{6}^{2}; \qquad V_{8}' = \frac{\sqrt{2}}{3} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \ell_{6}\right)^{3} = \frac{\sqrt{2}}{3} \times \frac{2\sqrt{2}}{8} \ell_{6}^{3} =$$

$$= \frac{4}{24} l_6^3 = \frac{1}{6} l_6^3.$$

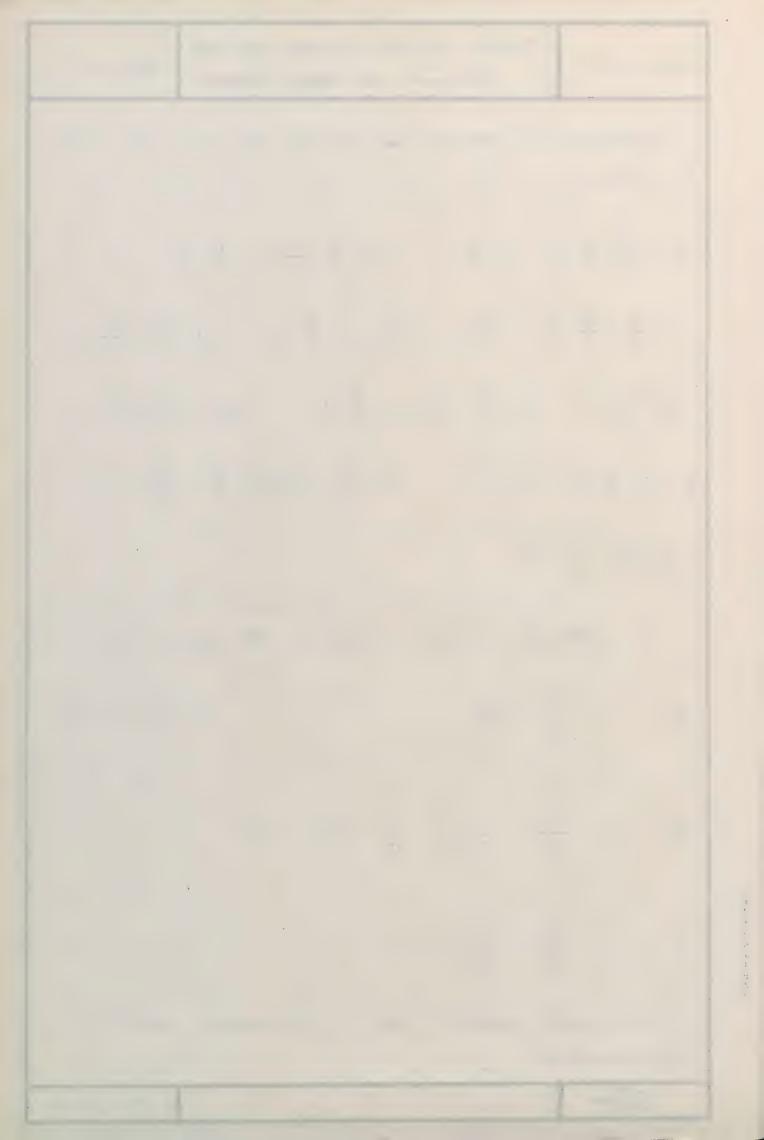
fou utiles las signiontes aélaciones de magnitudes:

a)
$$\frac{\ell_6}{\ell_8'} = \sqrt{2}$$
 (ver förmuda [2])

b)
$$\frac{S_6}{S_8'} = \frac{6 l_6^2}{\sqrt{3} l_2^2} = \frac{6 \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2 \sqrt{3}$$

$$\frac{V_6}{V_7^{\prime}} = \frac{\ell_6^3}{\frac{1}{6}\ell_6^3} = 6$$

estos contractos.



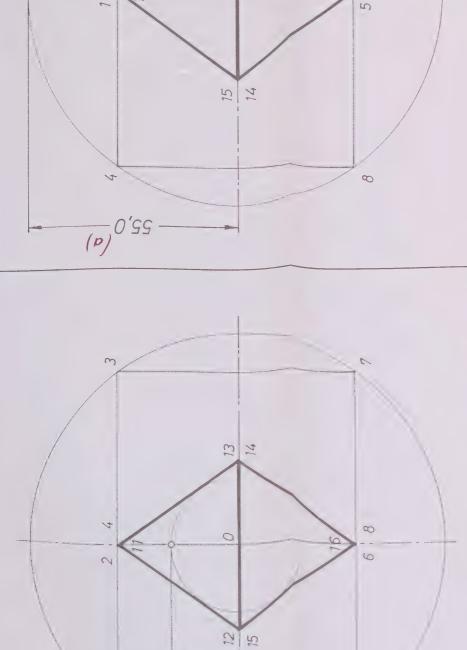
Moja no 6

CUADRO SINOPTICO

	Valor decimal aproximado	Magnitud Valor exacto			
4	0.70 71 07 6	l'g (67) VZ lo			
	0,50 00 00 le	a's (68) 1/2 ls			
4	0, 35 35 53 %	b_{8}^{1} (69) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ℓ_{6}			
1	0, 28 86 75 16	C_8^{\prime} (70) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ℓ_6			
-	0, 40 82 48 16	$d'_{8} \qquad (71) \qquad \frac{\sqrt{6}}{6} \qquad \ell_{6}$			
	sen $\Psi = 0.81 64 97$ 2 $\Psi = 109^{\circ} 28' 16.6''$	$2\varphi_8 \qquad \stackrel{(72)}{=} \text{sen } \Psi = \frac{\sqrt{6}}{3}$			
7		k's (73) V6 12 6			
1.					
	0, 16 66 67 \(\ell_6^3 \)	V'8 (75) 1/6 1/6			
	(76) Relaciones entre magnitudes				
	1. 41 42 14	lo: l'8 (17) V2			
	3, 46 41 02	S6: S8 (18) 2 V3			
	6. 00 00 00	V6: V8 (79) 6			
	0, 28 86 75 l_6 0, 40 82 48 l_6 sen $\Psi = 0.81 64 97$ $2 \Psi = 109^{\circ} 28' 16.6''$ 0, 20 41 24 l_6 1, 73 20 51 l_6^2 2 1, 73 20 51 l_6^2 entre magnitudes 1, 41 42 14 3, 46 41 02	$C_{8}^{2} = \frac{4}{16}$ $C_{8}^{2} = \frac{4}{12}$			



Z+



91'18 (01)

ENUNCIADO

7+

0

× +

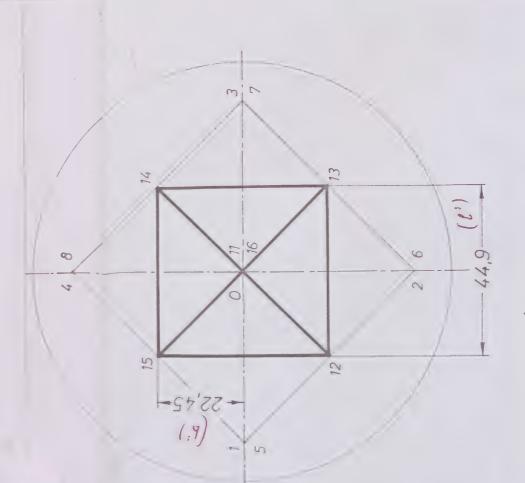
4

exaedro re-Representar por el método gráficode analítico, en los planos I, II y III, el gular, obtenido al unir los centros octaedro conjugado de un las caras de éste.

al exaedro dado, es de 55,0 mm, y las coordenadas de su centro 0(72,72,85) El radio de la esfera circunscrita mm.

Calcular previamente sus cotas funcomprodamentales, que servirán de bación al trazado gráfico.

esŭ > Dibujar en formato A3v cala 1:1.



NUMERACIÓN DE VÉRTICES

16 ∞ ō d Octaedro conjugado Exaedro dato....

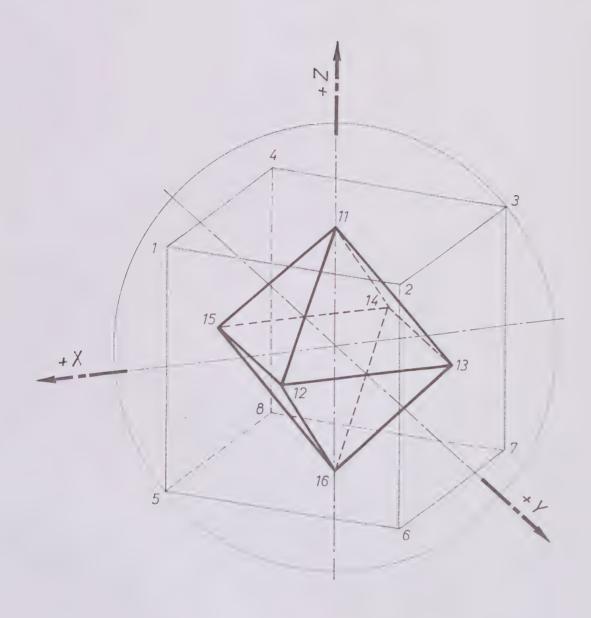
1+

(firma) Escuela			Poliedros regulares convexos co
Propuesta De entrega Entregada Califi-	cación		egulares
De entrega E			dros re
Propuesta			Polie
	Fecha:	Humno:	Escala 7:1

5 Lámina

onjugados





Poliedros regulares convexos conjugados



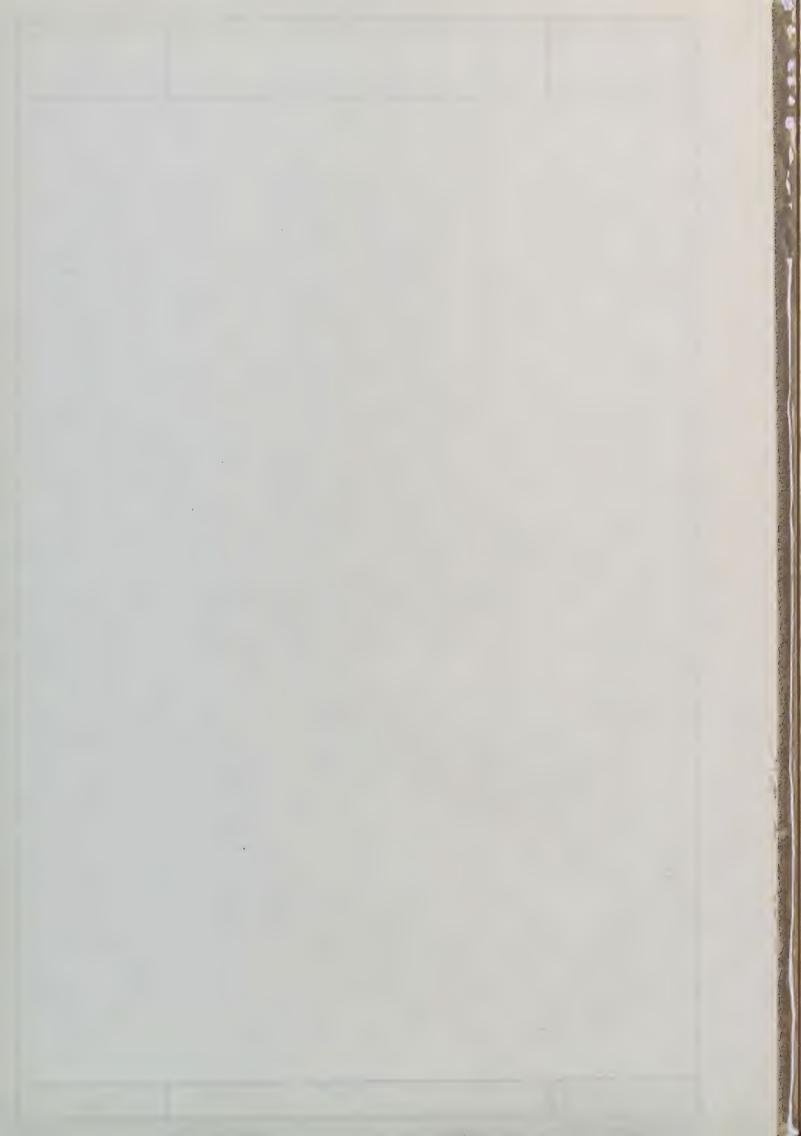
Lámina B

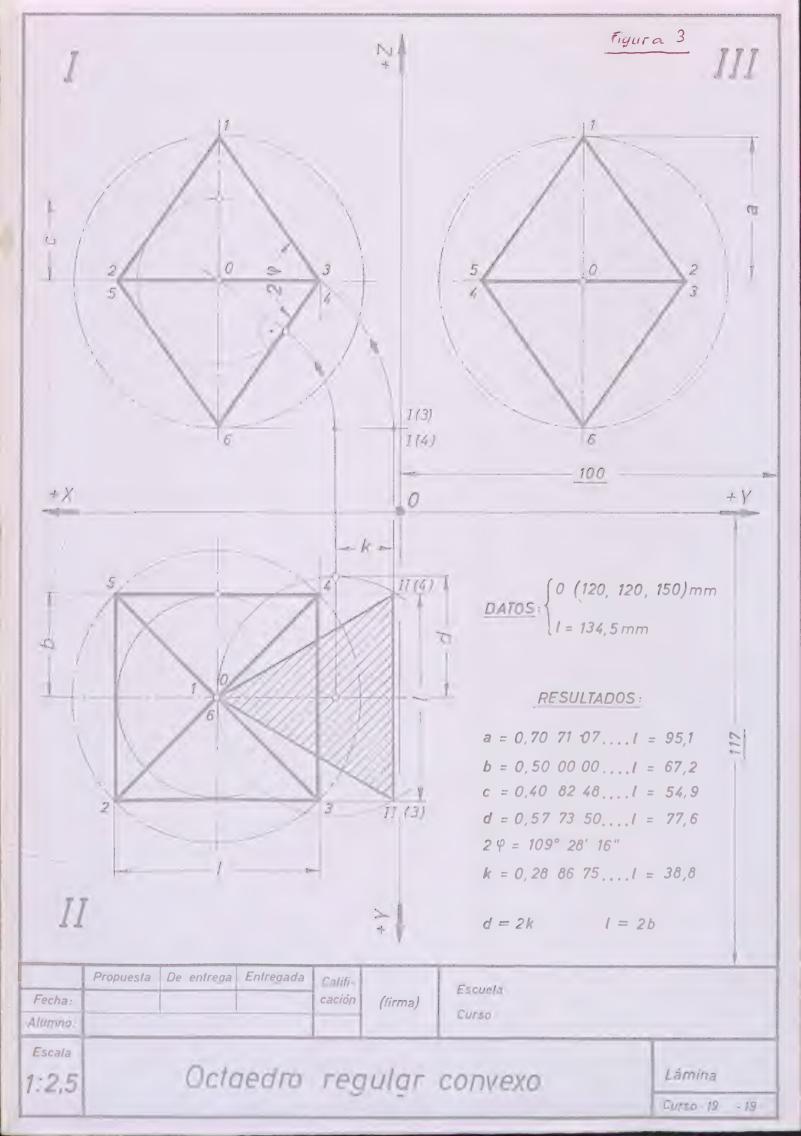
ENUNCIADO

Representar por el mitodo gráfico-analítico, en los planos I, II g II, el exaedro conjugado de un octaedro regular, obtenido al unir los centros de las caras de este.

El vadio de la esfera circumscrita al octacedro dado, es de 55,0 mm, y las coordenadas de su cuetro 0 (72, 72, 85) mm.

Valcular previamente sus cotas fundamentales, que serniran de comprobación al trasado gráfico. Dibujar en formato A3 v J a escala 1:1.







PROCESO GREFIED

Determinar presiamente el lado del octaedro regular, en función del radio a de la esfera circumscrita (ver proceso gráfico-analítico de la lámina 3); el lado l será:

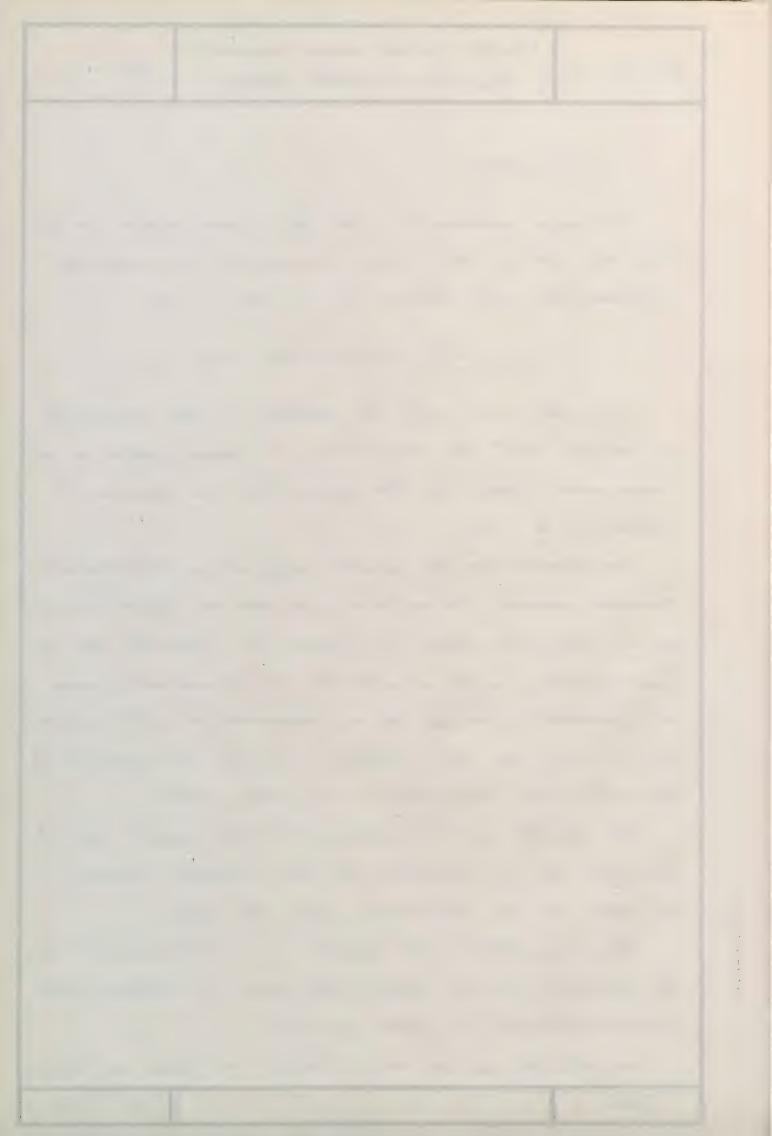
Comando como punto de partida este lado, representar el octaedro dato, de acuerdo con el proceso gráfico de la mencionada támina 3. Esta representación se hará en los planas I, II g III.

commando preniamente los centros de cada cara del octacho primitiNo, los cuales estan situados en el espacio, en el baricentro de sus
caras respectivas (puntos de intersección de las medianas); como
esta propiedad se conserva en sus proyecciones, a projecciones de
mar en cada uno de los planos I, I g II, las proyecciones de
los centros de las caras, ventices del potiedos pedido.

Este travado puede simplificarse terriendo presente que el baricantro de un taramquelo esta sobre cualquer mediana a dos tercios de en longitud a partir del vértice.

Una compreheción del trasado es la consessidencia de la projección de la résticia del craedro al obtenerse éstas independientemente en cada projección.

La falta de precision de este trasado, así como ou talore-



tico que a continuación exponensos.

PROCESO GRÁFICO-ANALÍTICO

Jara la reducción de los errores de trasado, mos servirentos

de cetas analíticas calculadas previamente de la forma signiente.

Observentos previamente que la espera inscrita en el octar dos
dado, es concentrica con la circumscrita, tangente a las caras

del missono en sus centros respectivos. Vos consequiente, calculacemes, previamente el radio de la espera inscrita al octar
dro dado, que será la circumscrita al escardos conjugados

Dai pues, y teniendo en cuenta el cálculo de la lámina

3º, ou rerificara:

 $C_8 = a_6' = 0.40~82~48 \times 77, 78~17~22 = 31, 75~42~32 \cong 31.8~mm$ g por consigniente, el lado del exaedro conjugado (fig. 2°), saldia $l_6' = \frac{31.75~42~32}{0.86~60~27} = 36, 66~66~46 \cong 36.7~mm.$

calcular los restantes del exaedro conjugado que se expresan a continuación:

 $a'_{6} = 0.86 \ 60 \ 25 \times 36, 66 \ 66 \ 46 = 31.8 \ mm$ $b'_{6} = 0.70 \ 71 \ 07 \times id = 25.9 \ ..$ $c'_{6} = 0.50 \ 00^{-} \ 00 \times id = 18.35 \ ..$ $d'_{6} = 0.70 \ 71 \ 07 \times id = 25.9 \ ..$

300



24 = 900

un esta valores se verifican las signientes relaciones;

La relación entre los radios de las esferas circumsoritas al octacho dado y al conjugado de este, será la misura que la
existente entre los radios de las esferas circumsorita e inscrita
al octación dado, cuyos salores son:

$$a_8 = \frac{\sqrt{2}}{2} l_8$$
 $c_8 = \frac{\sqrt{6}}{6} l_8$

) por consigniente:

$$\frac{a_8}{C_8} = \frac{\sqrt{2}}{2} l_8 : \frac{\sqrt{6}}{6} l_8 = \sqrt{3} = 1,73 20 51...$$
 [1]

'él lado l'6 del exarcho conjugado, en función del lado lo del octardo dado, será pues

$$a_{g} = \frac{\sqrt{2}}{2} l_{g} \qquad c_{g} = a_{6}' = \frac{\sqrt{6}}{6} l_{g} \qquad de \quad dowde$$

$$l_{6}' = a_{6}' : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{6} l_{g} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{3} l_{g} = 0, \, A7 \, IA \, 05 = l_{g} \, [2]$$

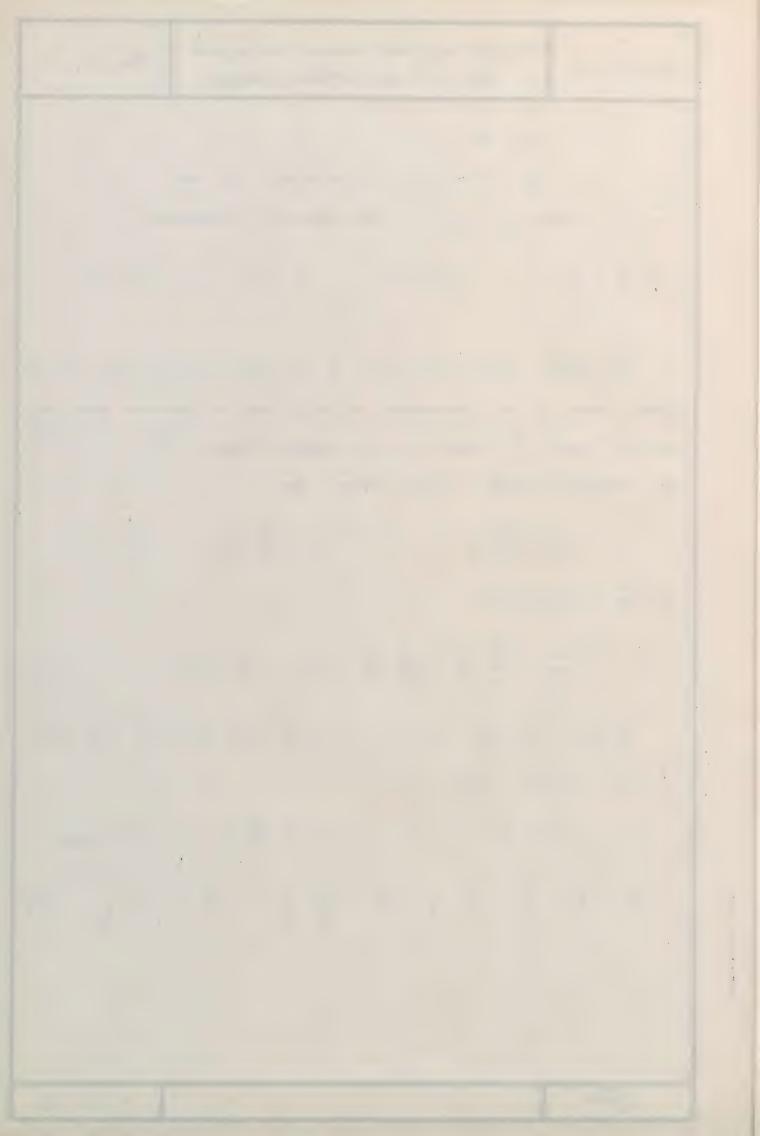


FIGURA CORPÔREA

Le obtience el escaedro conjugado por acoptamiento de 6 enadeados de 36,7 mm de lado, situado interiormente en en octare de o esquelar formado por 8 caras trianquentes (toanspener tes) de 77,8 mm de lado, de forma que la vérticas del primero esten en los centros de las caras del segundo.

RESUMEN DEL CALCULO DE MAGNITUDES DE ESTE EJERCICIO

Nomenclatura empleada

l'6 = bado del exactro conjugado

a's = Radio de la esfera circumerita al mismo.

b's = Radio de la espera tangente a las aristas.

c' = Radio de la esfera inscrita.

de = Radio de la circumferencia circumerità al pligene de essa cara.

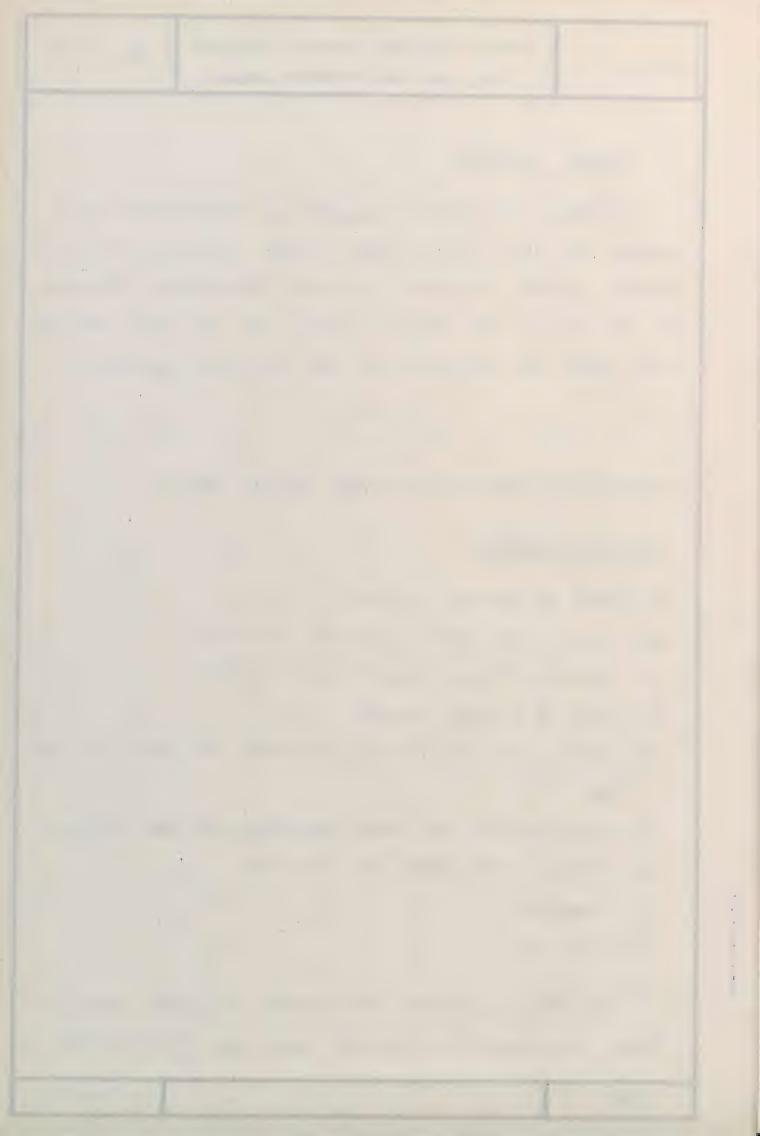
24 = Angulo rectelines del dudes formado por do caras contiqual.

k's - Apotema del poligono de una cara.

5' = Imperficie.

V' = Volumen.

Los varios anteriores del exacto anjugado pueden obtenerse directamente en función del lado la del estactro da-



Hora . 5

do, ya que el sulo, cenerado de l'en Juncia de l'over formula [2], es

Instituyendo este valor en las filambas 11 a 19 de la limenca 2, tenderen :

$$a_6' = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{3} l_8 = \frac{\sqrt{6}}{6} l_8;$$

$$c_6' = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{3} l_8 = \frac{\sqrt{2}}{6} l_8;$$

$$d_{\varepsilon}' = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{3} l_{\theta} = \frac{1}{3} l_{\theta};$$

$$k_6' = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{3} \ell_8 = \frac{\sqrt{2}}{6} \ell_8;$$

$$S'_{6} = 6 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{3}l_{g}\right)^{2} = 6 \times \frac{2}{9}l_{g}^{2} = \frac{4}{3}l_{g}^{2}; \qquad V'_{6} = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}l_{g}\right)^{2} = \frac{2\sqrt{2}}{27}l_{g}^{2}$$

$$V_{\ell}' = \left(\frac{V_2}{3} \ell_{\ell}\right)^2 = \frac{2V_2}{27} \ell_{\ell}^3$$

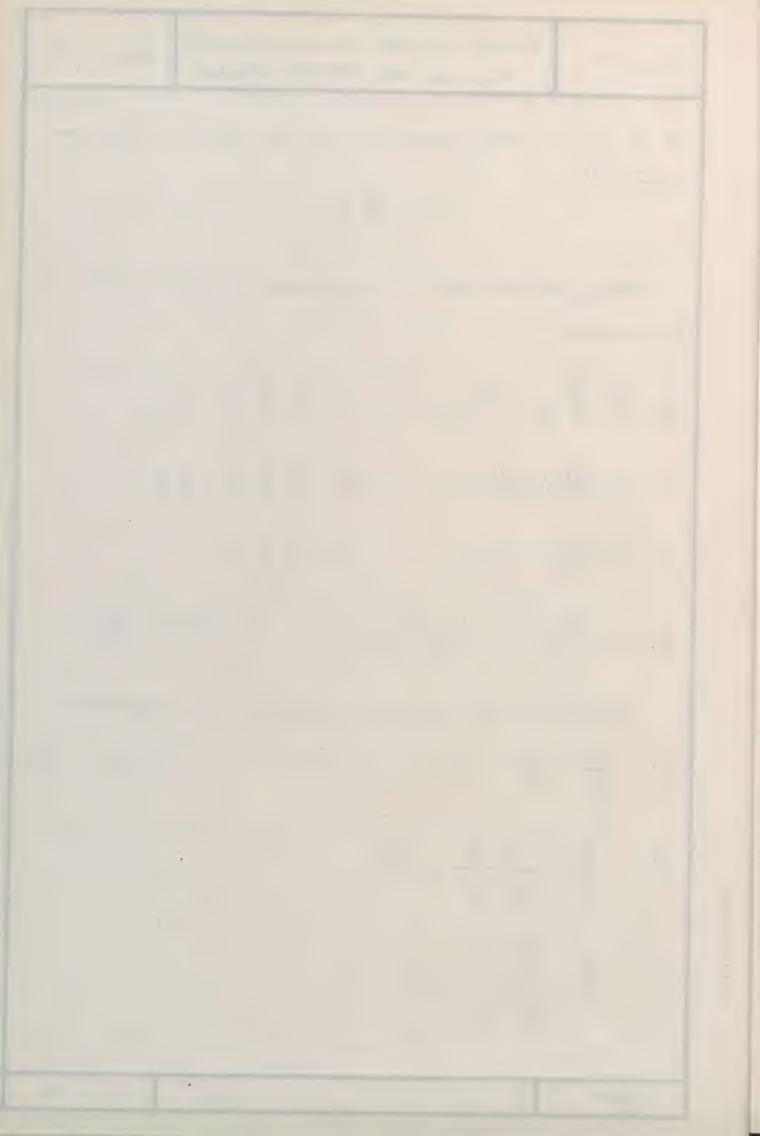
Son vitiles las servientes relaciones de magnitudes:

$$a) \quad \frac{\ell_8}{\ell_6'} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

(mer to's am le [8])

b)
$$\frac{S_8}{S_6'} = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{4}{3}} \frac{l_2^2}{l_2^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{V_8}{V_6'} = \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{\ell_2^3}{\ell_2^3} = \frac{9}{2}$$



En el cuadro simostico dado a contemación, resumminos estos resultados

CUADRO SINOPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal a proximado	
$\ell_6' = h_6'$	(80) V2/3 l8	0. 47 14 05 %	+
06	(811 <u>V6</u> l8	0, 40 82 48 19	+
b' ₆	$\left(\frac{82}{3}\right)$ $\frac{1}{3}$ ℓ_8	0, 33 33 33 /8	-
C'6	(83) $\frac{\sqrt{2}}{6}$ ℓ_8	0. 23 57 02 /8	+
d'6	(84) 1/3 l8	0,33 33 33 lg	_
2 46	(81) Sen $\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$	Sen $\Psi = 0.707107$ $2\Psi = 90^{\circ}$	+
K'6	(xG) V2 6 lg	0, 23 57 02 lg	+
Sé	$\left(87\right)$ $\frac{4}{3}$ ℓ_g^2	1, 33 33 33 12	_
V'6	(88) 2 VZ & 8	0, 10 47 57 28	-
	Relaciones ent	re magnitudes	
$\ell_{s}:\ell_{s}'$	(84) 3 V2 2	2. 12 13 20	1_
S8: S6	(90) 3 V3 .	2, 59 80 76	+
V8: 46	(91) 9/2	4. 50 00 00	-



Representar en tos planos I, II y El radio de la esfera circunscrita centros de las caras de éste. bación al trazado gráfico. 72, 85) mm. la 1:1. Z+ 1+ 0 18 52'6

exaedro regular conjugado de un oc-III, por el método gráfico-analítico, el taedro regular obtenido al unir los

las coordenadas de su centro 0 (72, al octaedro dado, es de 55,0 mm, y

Calcular previamente sus cotas fundamentales que servirán de compro-

Dibujar en formato A3v y a esca-

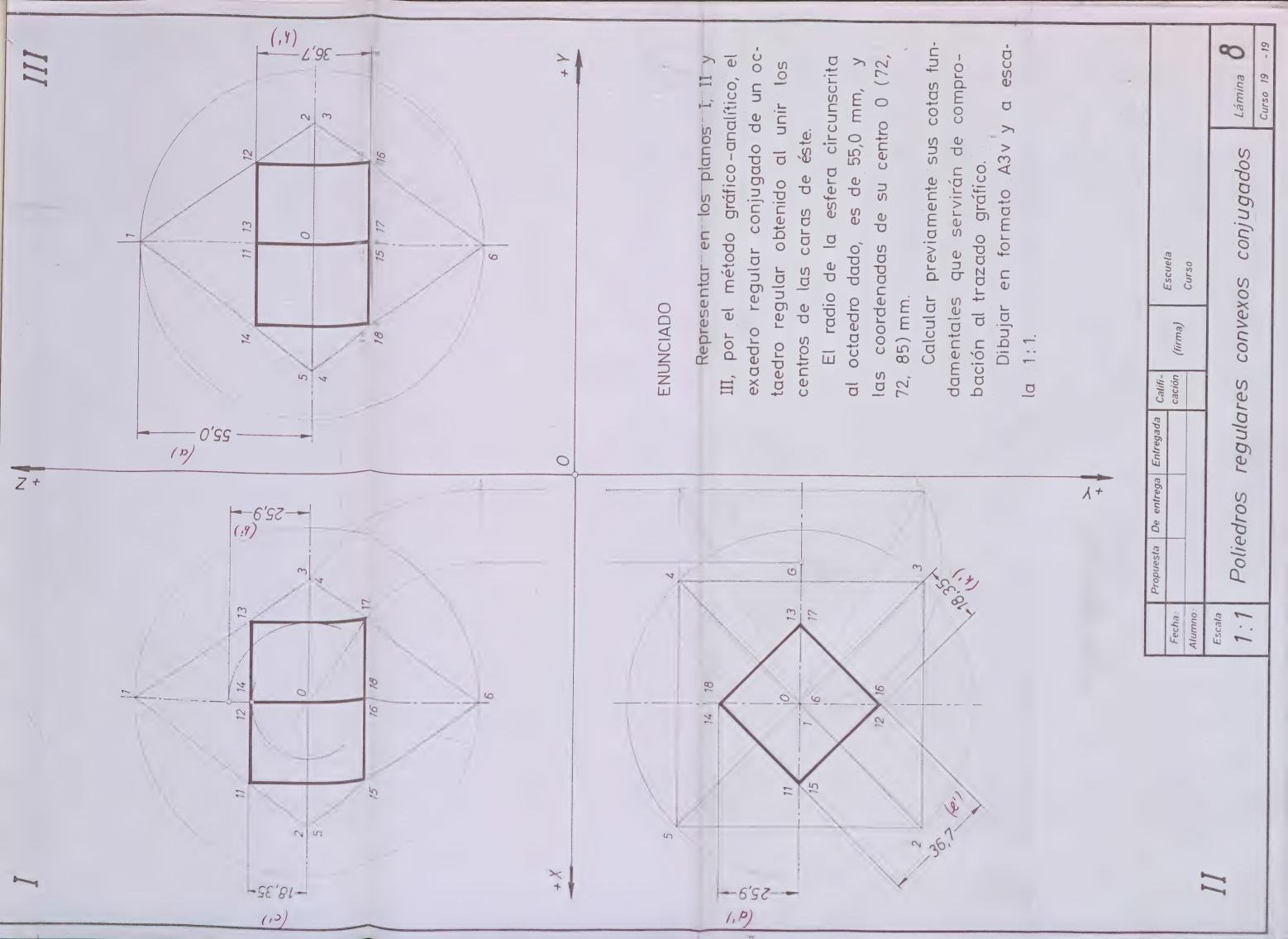
cación (firma) Escuela	Poliedros regulares convexos conjuga
cación	Poliec
Fecha: Alumno:	Escala 7:1

- 19

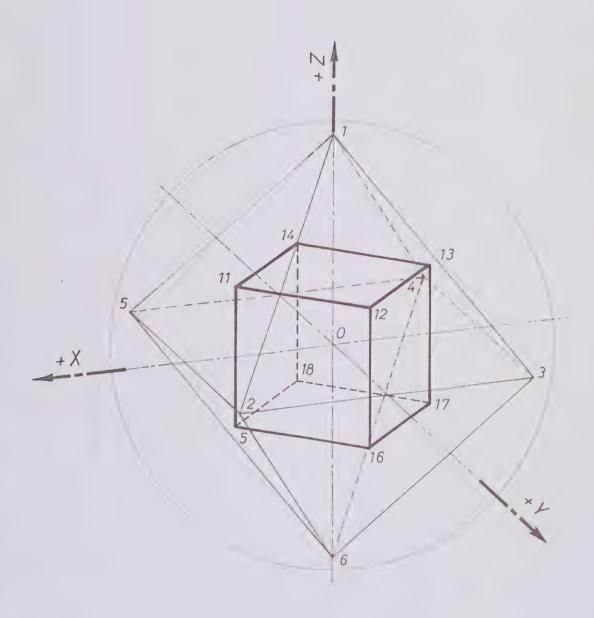
Curso 19

Lámina

Sopi







Poliedros regulares convexos conjugados



Lámina 9

ENUNCIADO

Representar por el mitodo gráfico-analítico, en los planes I, II, el icosaedro conjugado de un dodecaedro regular, obtenido al unive los centros de las caras de este.

El radio de la esfera circumscrita al dodecaedro dado, es de 55 mm, y las coordenadas de su centro 0 (72, 72, 85) mm.

Calcular previamente sus cotas fundamentales, que serniran de comprobación al trasado gráfico.

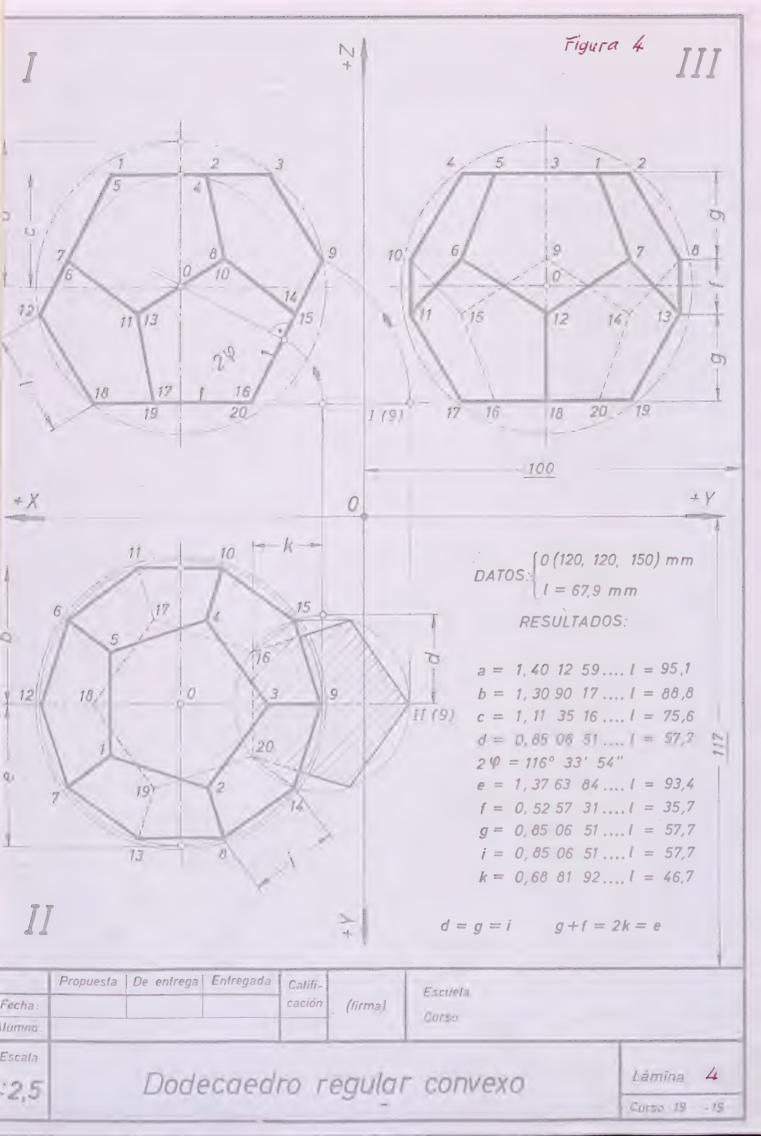
Dibujar en formato A3 v g a escala 1:1.

DATOS

0 (72, 72, 85) mm

a = 55 mm







PROCESO GRÁFICO

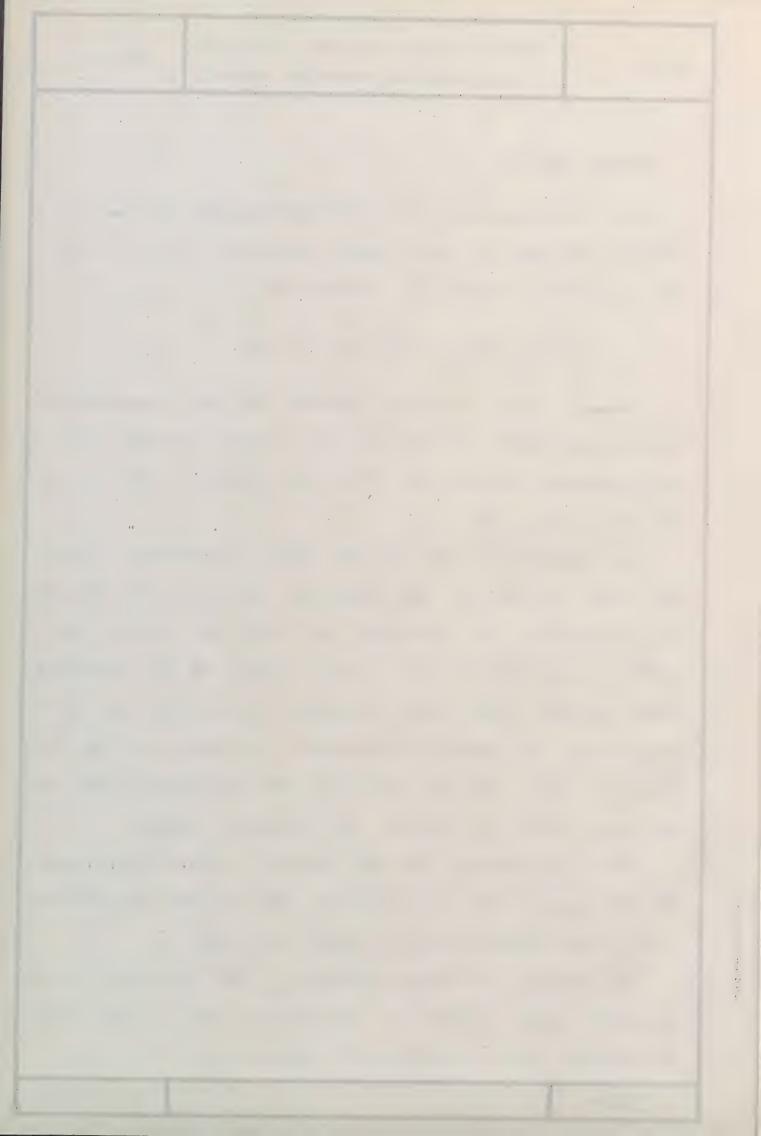
Siteraminare previamente « cars del dedicaretro arquilar, un funcion del nadio a de la esfera circumscrita (ver proceso qui-fico-amalítico de lam. 4); el lado será:

Comando como punto de partida este lado, representar el dodecardo dato, de acuerdo con el proceso gráfico de la mencionada lamima L: Esta representación se hará en los planos I, I g II.

La representación del instancedro redido se efectuará uniendo los centros de las mas del doderadro, los cuales estan situados en el espacio en la intersección de rectas que unan dos menticos consecutivos con los puntos medios de los aespecticos lados opuestos. Como esta propiedad se conserva en sus proyecciones, es posible determinar en cada uno de los Manos I, II ; II, las proyecciones de los centros de las racas, que serán los réntices del icosae dro pedido.

Una comprétacion de este travado es la correspondencia de las projecciones de les vértices del resacche al elternesse éstos independientemente en cada projección.

inevitables errores gradices, se simplifica con el proceso grafico-analítico que a continuación esoponemon



PROCESO GRAFICO-ANALÍTICO

Fara la reducción de los errores de trasado, mos servicemos de cotas analíticas calculadas previamente de la forma signicute. Observemos previamente que la esfera inscrita en el dodecaldro dado, es concinitaca con la circusculta, sendo aquilla a su vez tangente a las caras del mismo en sus centros cuspertises! For consigniente, calcularmos previamente el radio de la esfera inscrita al dodecaedro dado, que será la circumscrita del icosaedro conjugado.

Asi pues, j teniendo en enenta el catento de la lamina. 4º, se verificará:

2 = a' = 1. 11 35 16 x 39, 25 04 17 = 13, 70 59 53 = 13,7 mm

2 por consignmente, el lado del icisaedro conjugado (fig. 5), valda

$$\ell_{20} = \frac{43.705953}{0.951057} = 45,955136 \approx 46.0 mm$$

gado que se expresar a continuación:

a = 0,95 10 57 x 45,95 51 36 = 43,7 mm

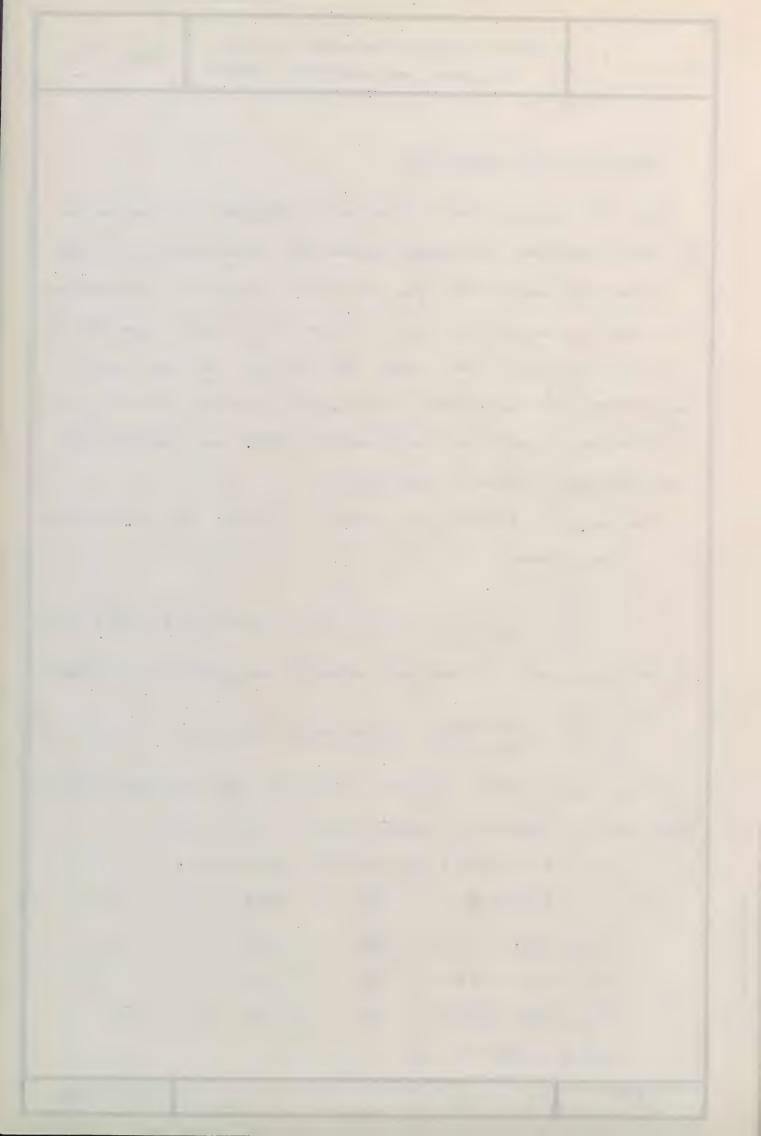
b'= 0,80 90 17 x id = 37,2 "

c'= 0,75 57 61 x id = 34.7 "

d, = 0,57 73 50 x id = 26.5 "

e'= 0.85 06 51 x id = 39.1 h

2 4 = 1380 11' 23"



1/20

1 = 0,85 CE 51 x 15, 95 51 36 = 39,1 mm

g' = 0.52 57 31 · id = 24.2 ·

h'= 0, C8 81 91 x id = 31.6 "

i' = 0,52 57 31 × id = 24.3 "

 $k_{20}^{\prime} = 0.28 \times 5.7 = 13.3 \text{ ...}$

con estos valores se verifican las signientes celaciones:

 $g_{20}' = i_{20}' = 24,2 \text{ mm}$ $g_{20}' = g_{20}' = 2 \times 13.3 = 26.5$ $g_{20}' = f_{20}' = 39.1 \text{ mm}$ $g_{20}' = f_{20}' = 24.2 + 39.1 = 2 \times 31.6 = 63.2 \text{ mm}.$

La relación entre los nadios de las esferas circumscritas al dodeca edro dado y al conjugado de este, será la misma que la existente entre los nadios de las esferas circumscrita e inscrita al dodeca edro dado, cuyos valores son:

 $a_{12} = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{4} \ell_{12}$ $c_{12} = a_{20}' = \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{40}} \ell_{12}$

I por consigniente:

 $\frac{a_{12}}{C_{12}} = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{4} + \frac{1}{12} = \frac{\sqrt{15 - 6\sqrt{5}}}{46} = \frac{1}{12} = \frac{\sqrt{15 - 6\sqrt{5}}}{46} = \frac{1}{12} =$

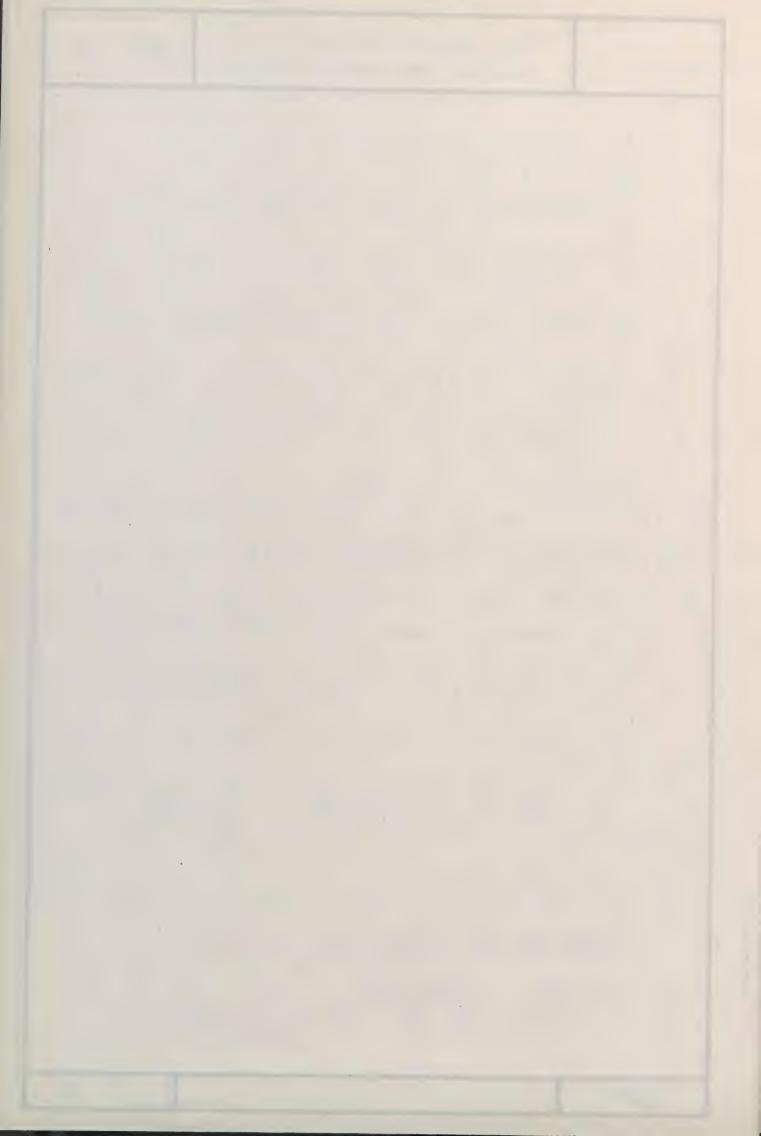
= 1, 25 84 09 ----

[1]

El desarrollo de este calculo es el signiente:

 $\frac{a_{12}}{C_{12}} = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{4} \ell_{12} : \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{40}} \ell_{12} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{4\sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{40}}} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{4\sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{400}}} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{5}}{4\sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{400}}} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{5}}{4\sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{400}}} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{5}}{4\sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{400}}} = \frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{400}}} = \frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{\frac{$

· my



$$\frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{2\sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{10}}} = \frac{(\sqrt{15} + \sqrt{3})\sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{10}}}{2 \times \frac{25 + 11\sqrt{5}}{10}} = \frac{5(\sqrt{15} + \sqrt{3})\sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{10}}}{25 + 11\sqrt{5}} = \frac{25 + 11\sqrt{5}}{10}$$

$$\frac{5(\sqrt{15}+\sqrt{3})(25-11\sqrt{5})\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}}{25^{2}-11^{2}\times 5} = \frac{(\sqrt{15}+\sqrt{3})(25-11\sqrt{5})\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}}{4}$$

$$= \frac{\left(25\sqrt{15} + 25\sqrt{3} - 55\sqrt{3} - 11\sqrt{15}\right)\sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{10}}}{4} = \frac{14\sqrt{15} - 30\sqrt{3}}{4} \times \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{10}}$$

$$= \frac{7\sqrt{15} - 15\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{10}} = \sqrt{(7\sqrt{15} - 15\sqrt{3})^2 \times (25 + 11\sqrt{5})} = \frac{7\sqrt{15} - 15\sqrt{3}}{40} = \frac{15\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{10}} = \frac{15\sqrt{3}}{40} = \frac{15\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{10}} = \frac{15\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{\frac{25$$

$$= \sqrt{(7^2 \times 15 + 15^2 \times 3 - 2 \times 7 \times 15 \times 3 \sqrt{5})(25 + 11 \sqrt{5})} = 40$$

$$= \sqrt{\frac{(7^2 \times 3 + 15 \times 3 \times 3 - 2 \times 7 \times 3 \times 3 \sqrt{5})(25 + 11\sqrt{5})}{8}} = \sqrt{\frac{(282 - 126\sqrt{5})(25 + 11\sqrt{5})}{8}}$$

$$=\sqrt{\frac{(141-63\sqrt{5})(25+11\sqrt{5})}{4}}=\sqrt{\frac{3525-1575\sqrt{5}+1551\sqrt{5}-3465}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{60 - 24\sqrt{5}}{4}} = \sqrt{15 - 6\sqrt{5}} \approx 1,25.84.09...$$

El lado l'o del icosaecho conjugado, en funcion del lado le del do de caecho dado, esrá pues:



de donde

$$\ell'_{30} = \alpha'_{20} : \frac{\sqrt{10 + 3\sqrt{5}}}{4} = \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{40}} \ \ell_{12} : \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} = \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10} \ \ell_{12} \cong$$

[2]

El desarrollo de este calculo es el signiente:

$$l_{20}^{\prime} = \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{40}} l_{12}; \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} = \frac{4\sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{40}}}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} l_{12} =$$

$$=4\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{40}}:(10+2\sqrt{5})\quad \ell_{12}=2\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10(10+2\sqrt{5})}}\quad \ell_{12}=$$

$$= \sqrt{\frac{4}{10}} \times \frac{25 + 11\sqrt{5}}{10 + 2\sqrt{5}} \ell_{12} = \sqrt{\frac{2}{5}} \times \frac{(25 + 11\sqrt{5})(10 - 2\sqrt{5})}{100 - 20} \ell_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{5}} \times \frac{250 + 110 \sqrt{5} - 50 \sqrt{5} - 110}{40} \ell_{12} = \sqrt{\frac{1}{5}} \times \frac{140 + 60 \sqrt{5}}{40} \ell_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{5} \times \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}} l_{12} = \sqrt{\frac{7 + 3\sqrt{5}}{10}} l_{12} \frac{\sqrt{7 + 3\sqrt{5}}}{\sqrt{10}} l_{12} = \sqrt{\frac{7 + 3\sqrt{5}}{10}} l_{12} = \sqrt{$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{9}{2}} \times 10 + \sqrt{\frac{5}{2}} \times 10}{10} l_{12} = \frac{\sqrt{45} + \sqrt{25}}{10} l_{12} = \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10} l_{12}$$

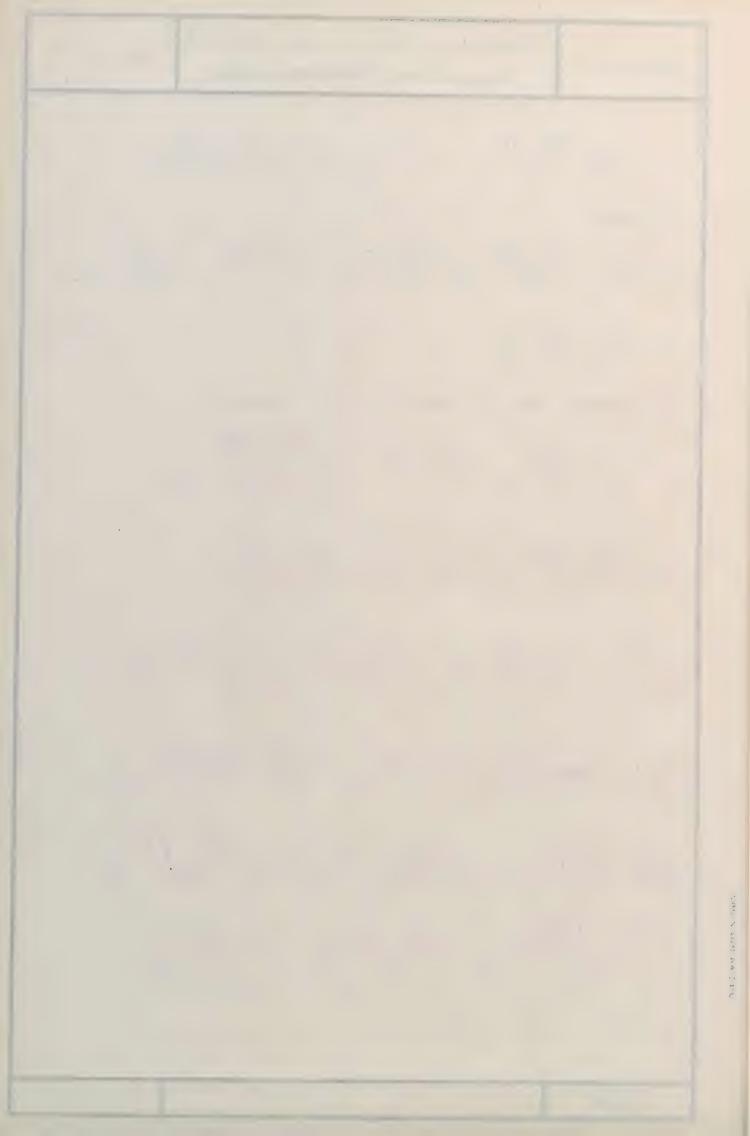


FIGURA CORPÓREA

Le obtiene el icosaecho conjugado por aceptamiento de 20 trianquelo equilatero de 16.0 mm de lado, situado interiormente en
un do decaecho regular formado por 12 caras pentago also
(transparentes) de 39.3 mm de lado, de forma que los vértices
del primero estre en les cueros de las caras de segue los vértices

RESUMEN DEL CALCULO DE MAGNITUDES DE ESTE EJERCICIO

Nomenclatura empleada

l'20 = bado del icosaedro conjugado

a'zo: Radio de la esfera circumscrita al mismo.

b's Radio de la esfera tangente a las aristas.

C' - Radio de la esfera inscrita.

d'20 = Radio de la circumferencia circumscrita al poligano de una cara.

24 = Angulo nectitiones de dides bornado po des caras untiques.

e' = Radio de la incumpromoia circumscrite a un pontagno se-

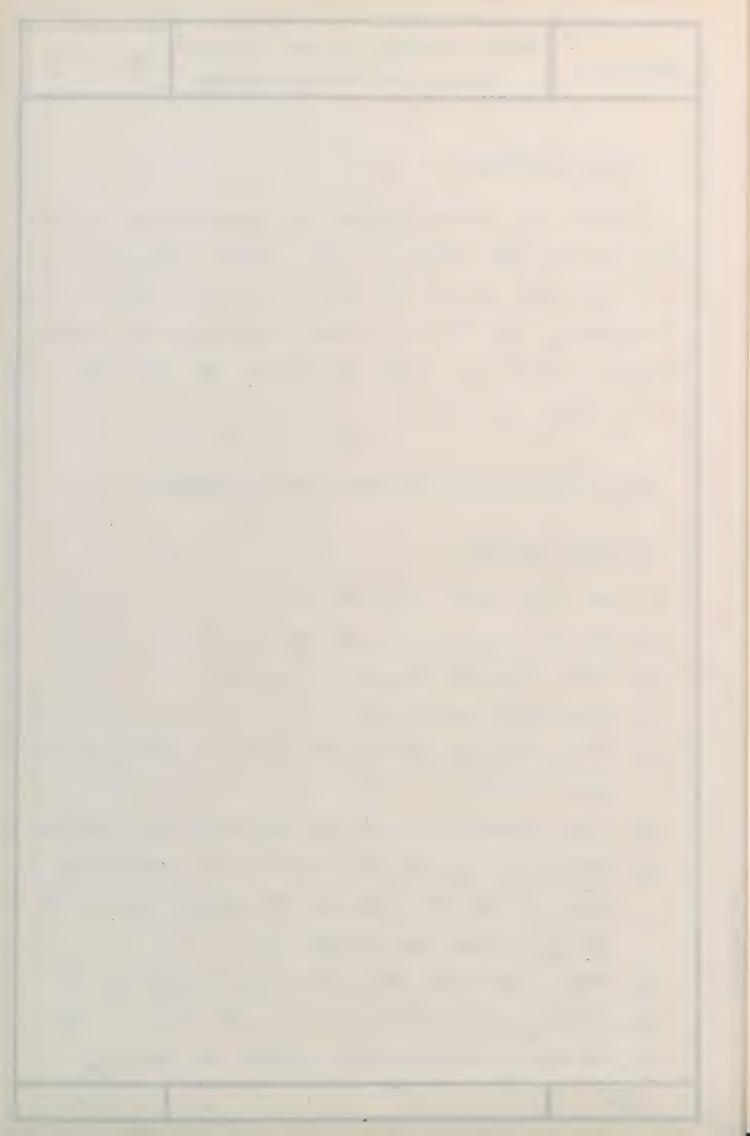
gular de lado l'20, j también al decagono cequilar de

lado i'zo, contorno de la nista I.

f' = Altura intermedia del conterno de las vistas I g II.

9'0 = Alturas esetromas del eneterno de las sistes I q III.

h 20 = Apriema de un pentagono regular de lado l'20.



i's = bado del decagono regular, contorno di se vista I.

k'20 = Apotema del poligono de una cara.

S' = Imperficue.

V' = Volumen.

Los valores anteriores del icosaedro conjugado, pueden obtemerse directamente en Luncion del lede la del deservación dado. ya que el valor conocido de l'o en función de la (ver form. [2]),

Lustituyendo este salor en las formulas 43 a 55 de la lariema 5, tendremos:

$$a'_{20} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} \times \left(\frac{5 + 3\sqrt{5}}{10}\right) \ell_{12} = \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{40}} \ell_{12}$$

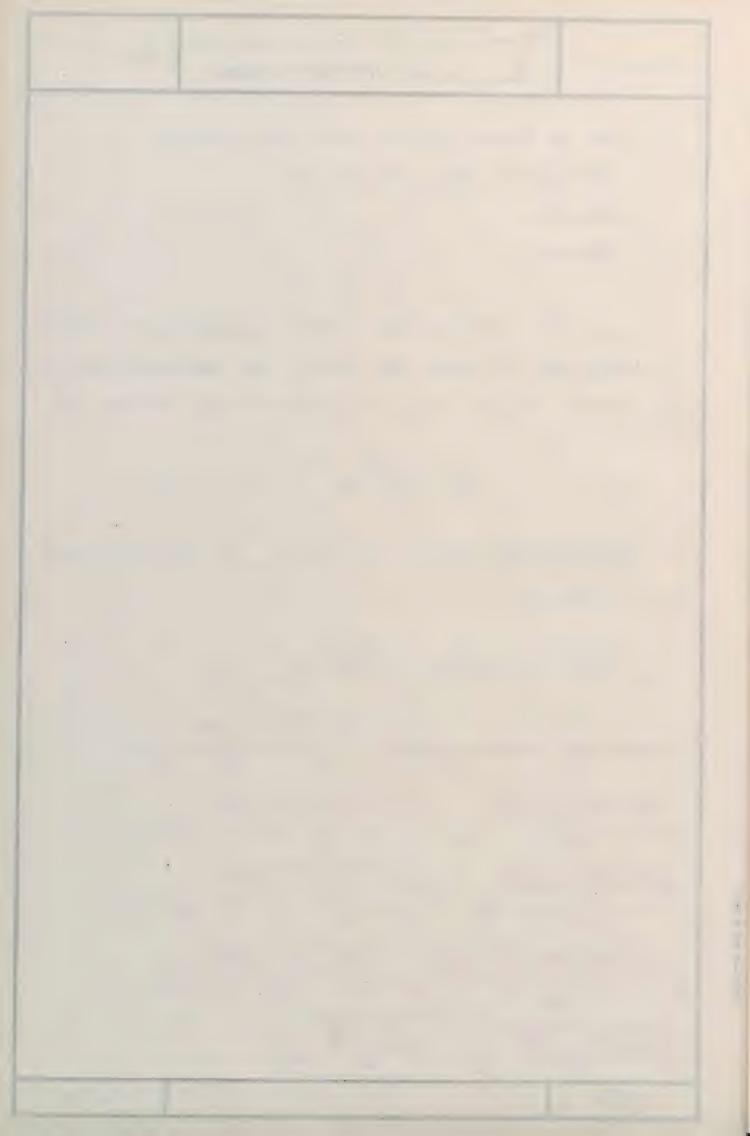
Desarrollo del calculo anterior: $\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \times \frac{5+3\sqrt{5}}{10}$

$$= \frac{\sqrt{(10+2\sqrt{5})(5+3\sqrt{5})^2}}{40} \ell_{12} = \frac{\sqrt{2(5+\sqrt{5})(25+45+30\sqrt{5})}}{40} \ell_{12} =$$

$$= \frac{\sqrt{2(5+\sqrt{5})(70+30\sqrt{5})}}{40} = \frac{\sqrt{2\times10\times(5+\sqrt{5})(7+3\sqrt{5})}}{40} = \frac{12}{40}$$

$$= \frac{\sqrt{5 \times (35 + 7\sqrt{5} + 15\sqrt{5} + 15)}}{40} l_{12} = \frac{\sqrt{5 \times (50 + 22\sqrt{5})}}{20} l_{12}$$

$$= \sqrt{\frac{10 \times (25 + 11 \sqrt{5})}{400}} l_{12} = \sqrt{\frac{25 + 11 \sqrt{5}}{40}} l_{12}$$



Desarrollo del calculo anterior: 1+15 x 5+315

 $\frac{5+5\sqrt{5}+3\sqrt{5}+15}{40}l_{12}=\frac{20+8\sqrt{5}}{40}l_{12}=\frac{5+2\sqrt{5}}{10}l_{12}$

 $C'_{20} = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{15}}{12} \times \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10} \ell_{12} = \frac{7\sqrt{15} + 15\sqrt{3}}{60} \ell_{12}$

Desarrollo del cálculo anterior: 3 /3 + VI5 5 + 3 V5 /10 /12 =

 $= \frac{15\sqrt{3} + 5\sqrt{15} + 9\sqrt{15} + 15\sqrt{3}}{120} \ell_{12} = \frac{30\sqrt{3} + 14\sqrt{15}}{120} \ell_{12} = \frac{7\sqrt{15} + 15\sqrt{3}}{60} \ell_{12}$

 $d'_{20} = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10} l_{12} = \frac{3\sqrt{15} + 5\sqrt{3}}{30} l_{12}$

 $e'_{20} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times \frac{5+3\sqrt{5}}{10} l_{12} = \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{50}} l_{12}$

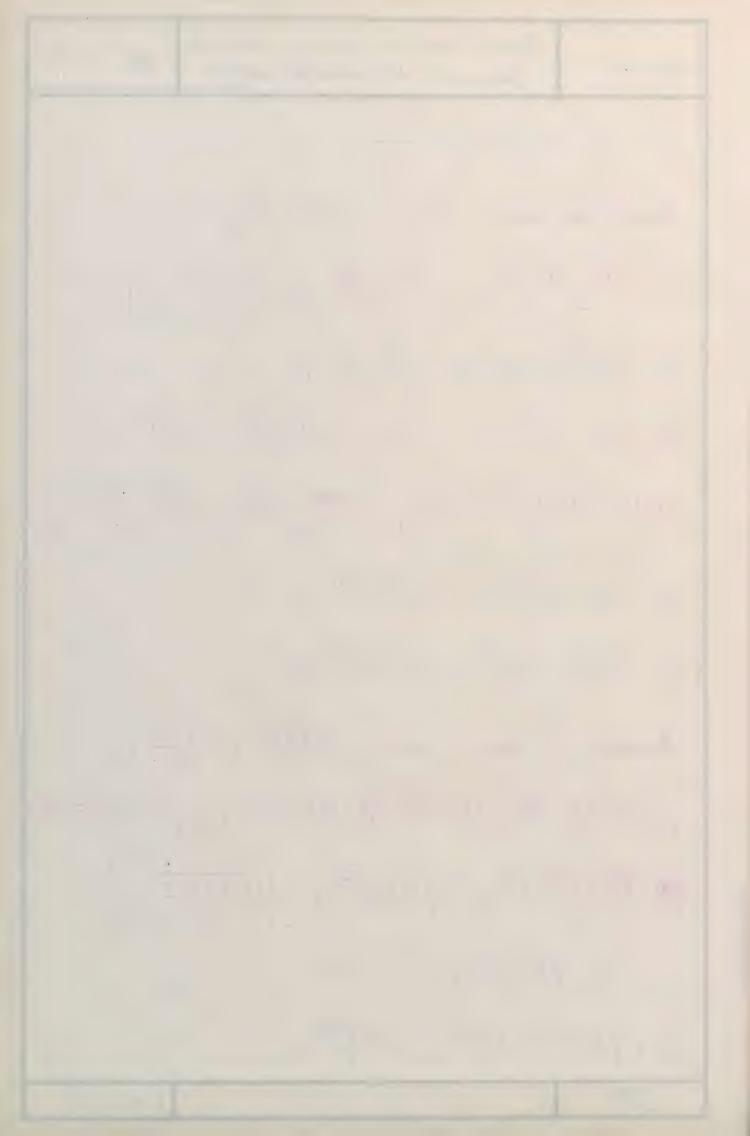
Desarrollo del calculo auterior: $\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times \frac{5+3\sqrt{5}}{10} l_{12} =$

 $= \sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(5+3\sqrt{5})^2}{1000}} l = \sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(25+45+30\sqrt{5})}{1000}} l_{12} = \sqrt{\frac{10\times(5+\sqrt{5})(7+3\sqrt{5})}{1000}} l_{12}$

 $= \sqrt{\frac{35 + 7\sqrt{5} + 15\sqrt{5} + 15}{100}} \, \ell_{12} = \sqrt{\frac{50 + 22\sqrt{5}}{100}} \, \ell_{12} = \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{50}} \, \ell_{12}$

 $f'_{20} = e'_{20} = \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{50}} l_{12}$

 $g'_{20} = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}} \times \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10} \ell_{12} = \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{5} \ell_{12}$



Desarrollo del cálculo auterior:
$$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \times \frac{5+3\sqrt{5}}{10}$$
 | =

$$= \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(5+3\sqrt{5})^2}{1000}} l_{12} = \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(25+45+30\sqrt{5})}{1000}} l_{12}$$

$$-\sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(70+30\sqrt{5})}{1000}}\ell_{12}=\sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(7+3\sqrt{5})}{100}}\ell_{12}=\sqrt{\frac{35-7\sqrt{5}+15\sqrt{5}-15}{100}}\ell_{12}=\sqrt{\frac{35-7\sqrt{5}+15\sqrt{5}-15}{100}}$$

$$= \sqrt{\frac{20 + 8\sqrt{5}}{100}} l_{12} = \sqrt{\frac{4 \times (5 + 2\sqrt{5})}{100}} l_{12} = \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{5} l_{12}$$

$$h'_{20} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}} \times \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \ell_{12} = \frac{1}{10} \sqrt{\frac{65+29\sqrt{5}}{2}} \ell_{12}$$

$$= \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(5+3\sqrt{5})^2}{2000}} l_{12} = \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(25+45+30\sqrt{5})}{2000}} l_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(70+30\sqrt{5})}{2000}} l_{12} = \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(7+3\sqrt{5})}{200}} l_{12} = \sqrt{\frac{35+14\sqrt{5}+15\sqrt{5}+30}{200}} l_{12}$$

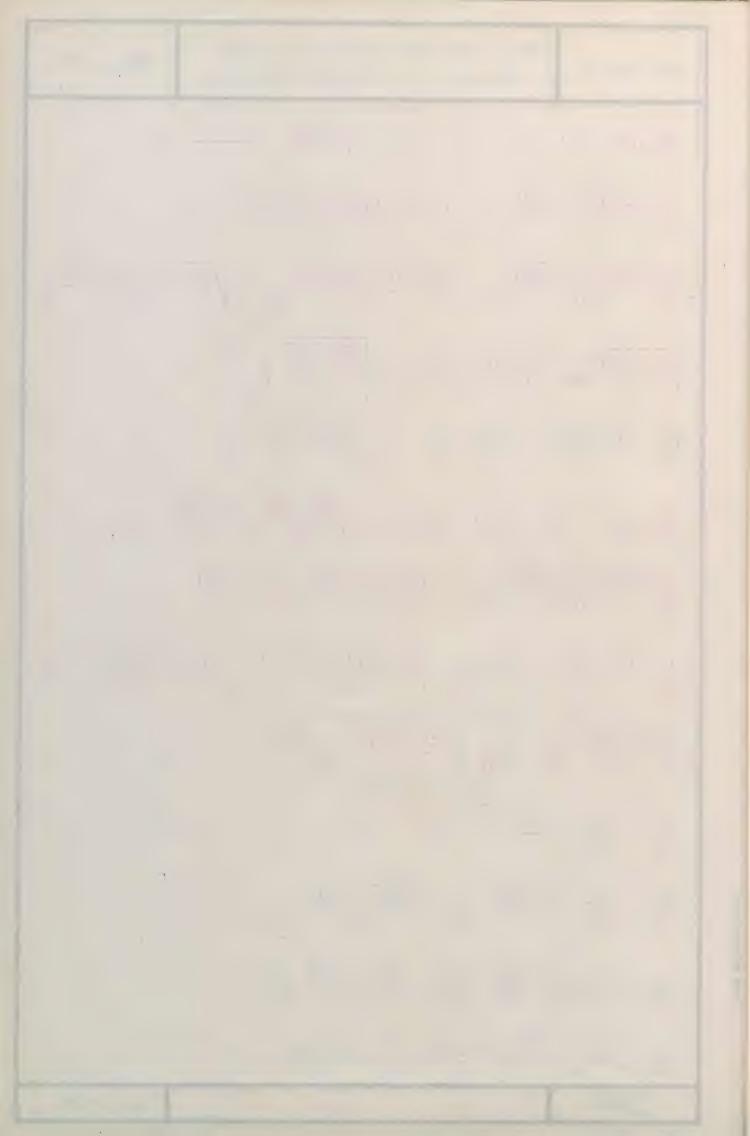
$$= \sqrt{\frac{65 + 29\sqrt{5}}{200}} l_{12} = \sqrt{\frac{65 + 29\sqrt{5}}{10}} l_{12}$$

$$i'_{20} = g'_{20} = \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{5} l_{12}$$

$$k'_{20} = \frac{\sqrt{3}}{6} \times \frac{5+3\sqrt{5}}{10} l_{12} = \frac{3\sqrt{15}+5\sqrt{3}}{60} l_{12}$$

$$S'_{20} = 51/3 \times \left(\frac{5+31/5}{10} \ell_{12}\right)^2 = \frac{3\sqrt{15} + 7\sqrt{3}}{2} \ell_{12}^2$$

$$V'_{20} = \frac{15 + 5\sqrt{5}}{12} \times \left(\frac{5 + 3\sqrt{5}}{10}\right)^3 = \frac{105 + 47\sqrt{5}}{50}$$



desarrollo de los dos ciltimos cálculos;

$$S'_{20} = 5\sqrt{3} \times \left(\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\ell_{12}\right)^2 = \frac{5\sqrt{3} \times \left(5+3\sqrt{5}\right)^2}{100}\ell_{12} = \frac{5\sqrt{3} \times \left(25+45+36\sqrt{5}\right)}{100}\ell_{12}$$

$$=\frac{5\sqrt{3}\times(7c+36\sqrt{5})}{100}l_{12}^{2}=\frac{5\sqrt{3}\times(7+3\sqrt{5})}{10}l_{12}^{2}=\frac{\sqrt{3}\times(7+3\sqrt{5})}{2}l_{12}^{2}=$$

$$= \frac{3\sqrt{15} + 7\sqrt{3}}{2} l_{12}^{2}$$

$$V_{20}^{'1} = \frac{15 + 5\sqrt{5}}{12} \times \left(\frac{5 + 3\sqrt{5}}{10} \cdot l_{12}\right)^{3} = \frac{(15 + 5\sqrt{5})(5 + 3\sqrt{5})(5 + 3\sqrt{5})^{2}}{12 \times 10^{3}} l_{12}^{3} =$$

$$= \frac{(75 + 22 \sqrt{5} + 45 \sqrt{5} + 75)(25 + 45 + 30 \sqrt{5})}{12000} l_{12}^{3} = \frac{(150 + 70 \sqrt{5})(70 + 30 \sqrt{5})}{12000} l_{12}^{3}$$

$$=\frac{(15+7\sqrt{5})(7+3\sqrt{5})}{120}l_{12}^{3}=\frac{105+49\sqrt{5}+45\sqrt{5}+105}{120}l_{12}^{3}=\frac{210+94\sqrt{5}}{120}l_{12}=$$

$$= \frac{105 + 47 \sqrt{5}}{60} \ell_{12}^{3}$$

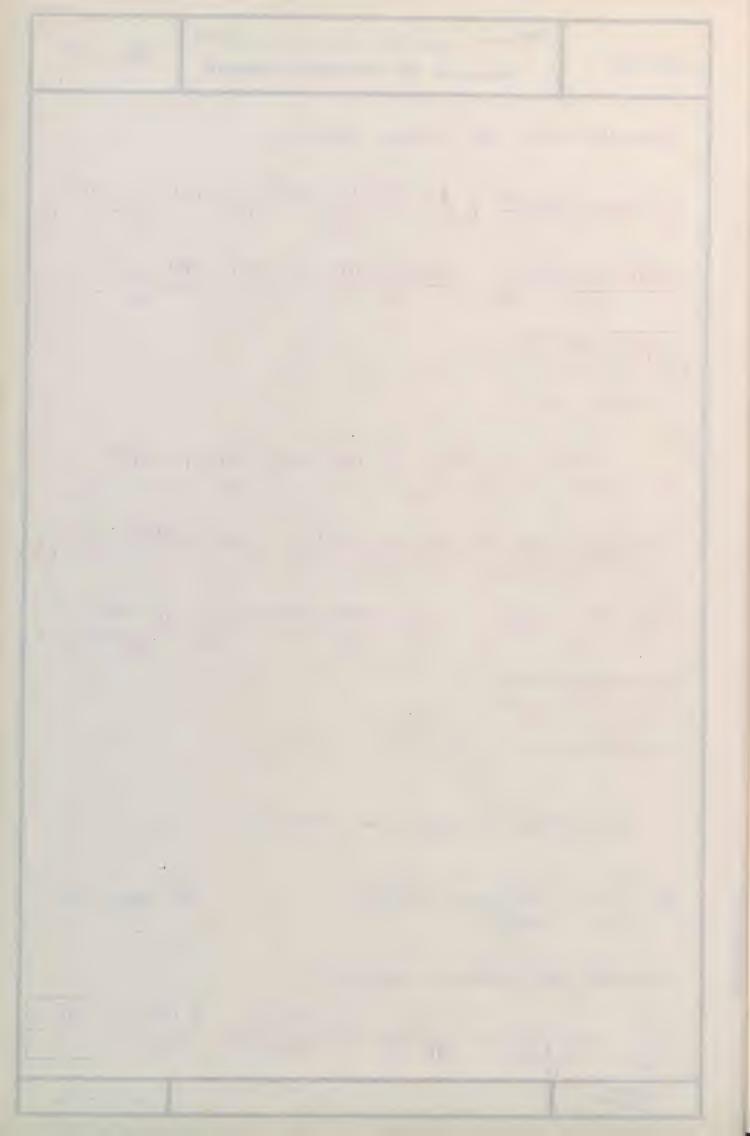
Son vitiles las signientes relaciones:

a)
$$\frac{l_{12}}{l_{20}'} = \frac{1}{5+3\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}-5}{2}$$
 (rer foraula [2]

Desarrollo del calculo anterior:

$$\frac{l_{12}}{l_{20}^2} = \frac{1}{5+3\sqrt{5}} = \frac{10}{3\sqrt{5}+5} = \frac{10(3\sqrt{5}-5)}{45-25} = \frac{10(3\sqrt{5}-5)}{20} = \frac{3\sqrt{5}-5}{2}$$

(30)



b)
$$\frac{S_{12}}{S_{20}'} = \frac{3\sqrt{25 + 1015}}{7\sqrt{3} + 3\sqrt{15}} = \sqrt{\frac{15 \cdot (25 - 11\sqrt{5})}{2}}$$

Desarrollo del calculo auterior: $\frac{S_{12}}{S_{20}^2} = \frac{3\sqrt{25+10\sqrt{5}} \ l_{12}^2}{2} = \frac{3\sqrt{25+10\sqrt{5}} \ l_{12}^2}{2}$

$$= \frac{6\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4\sqrt{3}+3\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{(25+10\sqrt{5})(7\sqrt{3}-3\sqrt{15})^2}}{147-135}$$

 $= 6\sqrt{(25 + 10 \text{ VF})(147 + 135 - 42 \text{ V45})} = \sqrt{(25 + 10 \text{ VF})(282 - 42 \times 3 \text{ VF})}$ 12

 $= \frac{\sqrt{6(25 + 10\sqrt{5})(47 - 21\sqrt{5})}}{2} = \frac{\sqrt{6 \times (1175 + 470\sqrt{5} - 525\sqrt{5} - 1050)}}{2}$

$$\frac{\sqrt{6} \times (125 - 55\sqrt{5})}{2} = \frac{\sqrt{30} \times (25 - 11\sqrt{5})}{2} = \sqrt{\frac{30}{4} \times (25 - 11\sqrt{5})} = \sqrt{\frac{15 \times (25 - 11\sqrt{5})}{2}}$$

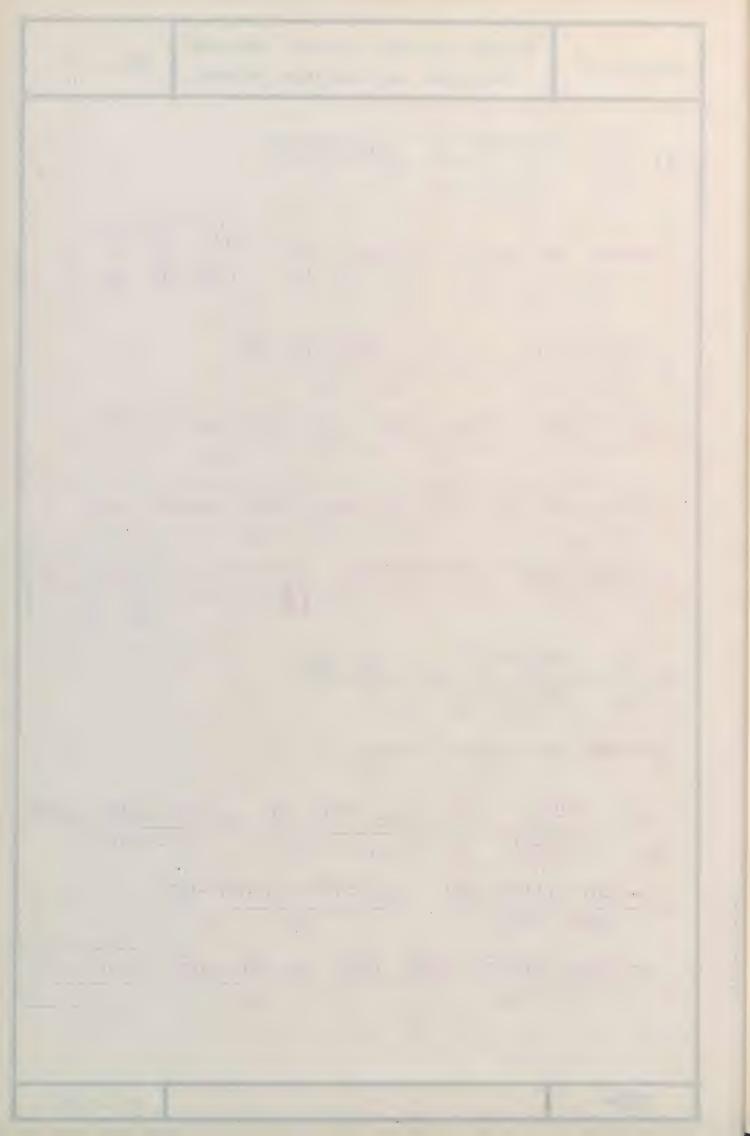
c)
$$\frac{V_{12}}{V_{20}^{\prime}} = \frac{7\sqrt{5} + 15}{4} \ell_{12}^{3} = \frac{15 \times (7 - 3\sqrt{5})}{2}$$

Desarrollo del calculo auterior:

 $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{20}} = \frac{\frac{7\sqrt{5} + 15}{4}}{\frac{105 + 47\sqrt{5}}{60}} \cdot \frac{l_{12}^{3}}{l_{12}} = \frac{60 \times (7\sqrt{5} + 15)}{4 \times (105 + 47\sqrt{5})} = \frac{15 \times (7\sqrt{5} + 15)(105 - 47\sqrt{5})}{105^{2} - (47\sqrt{5})^{2}}$ $15 \times (7\sqrt{5} + 15)(105 - 47\sqrt{5}) = 15 \times (7\sqrt{5} + 15)(47\sqrt{5} - 105)$

 $=\frac{15 \times (7\sqrt{5} + 15)(105 - 47\sqrt{5})}{11025 - 11045} = \frac{15 \times (7\sqrt{5} + 15)(47\sqrt{5} - 105)}{20}$

 $= \frac{15 \times \left(1645 + 705 \sqrt{5} - 735 \sqrt{5} - 1575\right)}{20} = \frac{15 \times \left(70 - 30\sqrt{5}\right)}{20} = \frac{15 \times \left(7 - 3\sqrt{5}\right)}{2}$

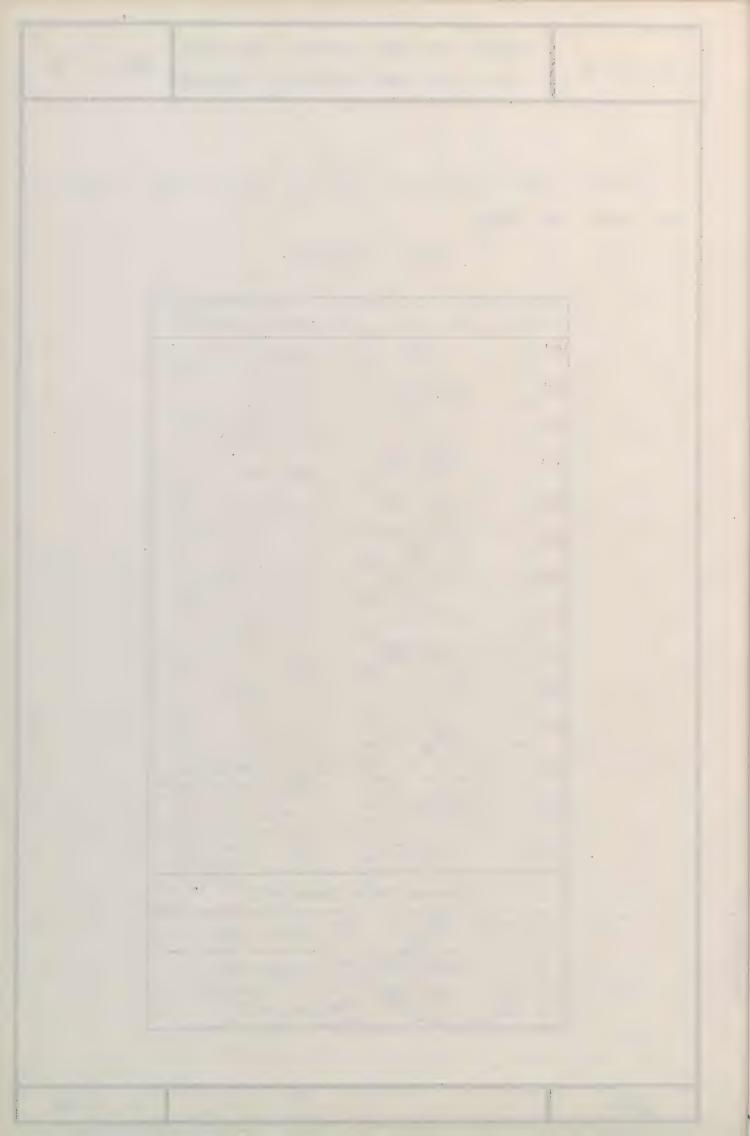


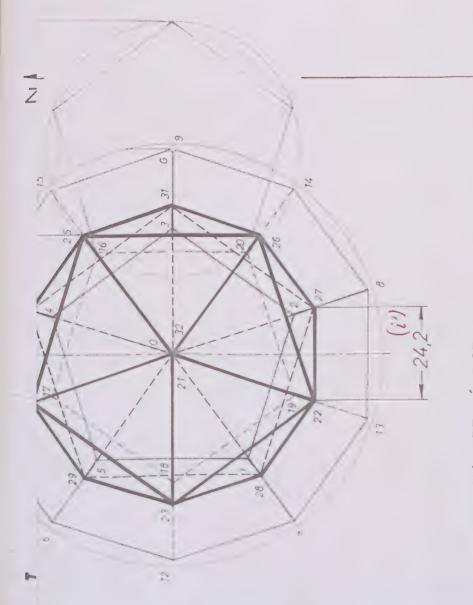
En el cuados sinoptico dade a comunición, tesumi-

CUADRO SINOPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado			
(92) 1 20	5+3 VE 112	1. 17 08 20 1,2			
(93) a'20	V 25 + 11 V5 40 1,2	1. 11 35 16 l ₁₂			
(F4) b'20	$\frac{5+2\sqrt{5}}{10} \mid_{12}$	0, 94 72 14 1/12			
(95) C'20	7 Y 15 V3 60 L12	0.88 48 61 l ₁₂			
(96) d' ₂₀	$\frac{3\sqrt{15} + 5\sqrt{3}}{30} l_{12}$	0. 67 59 73 l ₁₂			
(97) e' ₂₀	$\sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{50}} l_{12}$	0.99 59 59 112			
(98) f'20	$\sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{50}} l_{12}$	0,99 59 59 1 12			
(99) 920	V5 + 2 V5 12	0.61 55 37 1,2			
(100) h'20	$\frac{1}{10} \times \sqrt{\frac{65 + 29\sqrt{5}}{2}} \left(\frac{1}{12} \right)$	0,80 57 48 112			
(101)	V5+215 5 1/2	0, 61 55 37 L ₁₂			
(102) k 20	$\frac{3\sqrt{15} + 5\sqrt{3}}{60}$ (12	0, 33 79 87 1,2			
(103) 2 P20	sen y = VT5 + V3	sen $\Psi_{20} = 0.93$ 41 72 2 $\Psi_{20} = 138^{\circ}$ 11' 22,8"			
(ic4)5'20	$\frac{3\sqrt{15}+7\sqrt{3}}{2} \left(\frac{2}{12}\right)$	11, 87 16 53 (2			
(105) V 20	$\frac{105 + 47\sqrt{5}}{60} $	3, 50 15 87 (3			
	Relaciones entre magnitudes				
$l_{12}: l'_{20}$	<u>3√5 - 5</u> 2	(146) 0, 85 41 02			
S ₁₂ : S' ₂₀	$\sqrt{\frac{15 \times (25 - 11\sqrt{5})}{2}}$	(107) 1, 73 90 78			
V12: 420	15 × (7 - 315)	(108) 2, 18 84 71			

UNE A4 210 X 297





Representar por el método gráficoicosaedro regular conjugado de un doanalítico, en los planos I, II y III, el decaedro regular, obtenido al unir los centros de las caras de éste.

y las coordenadas de su centro 0 (72, al dodecaedro dado, es de 55,0 mm, El radio de la esfera circunscrita 72, 85) mm.

Calcular previamente sus cotas fundamentales, que servirán de comprobación al trazado gráfico.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

2	3
ō	a
	21
Oodecaedro dato	cosaedro conjugado

1+

(firm			
Califi-	cación		
Entregada			
De entrega			
Propuesta			
	Fecha:	Alumno:	

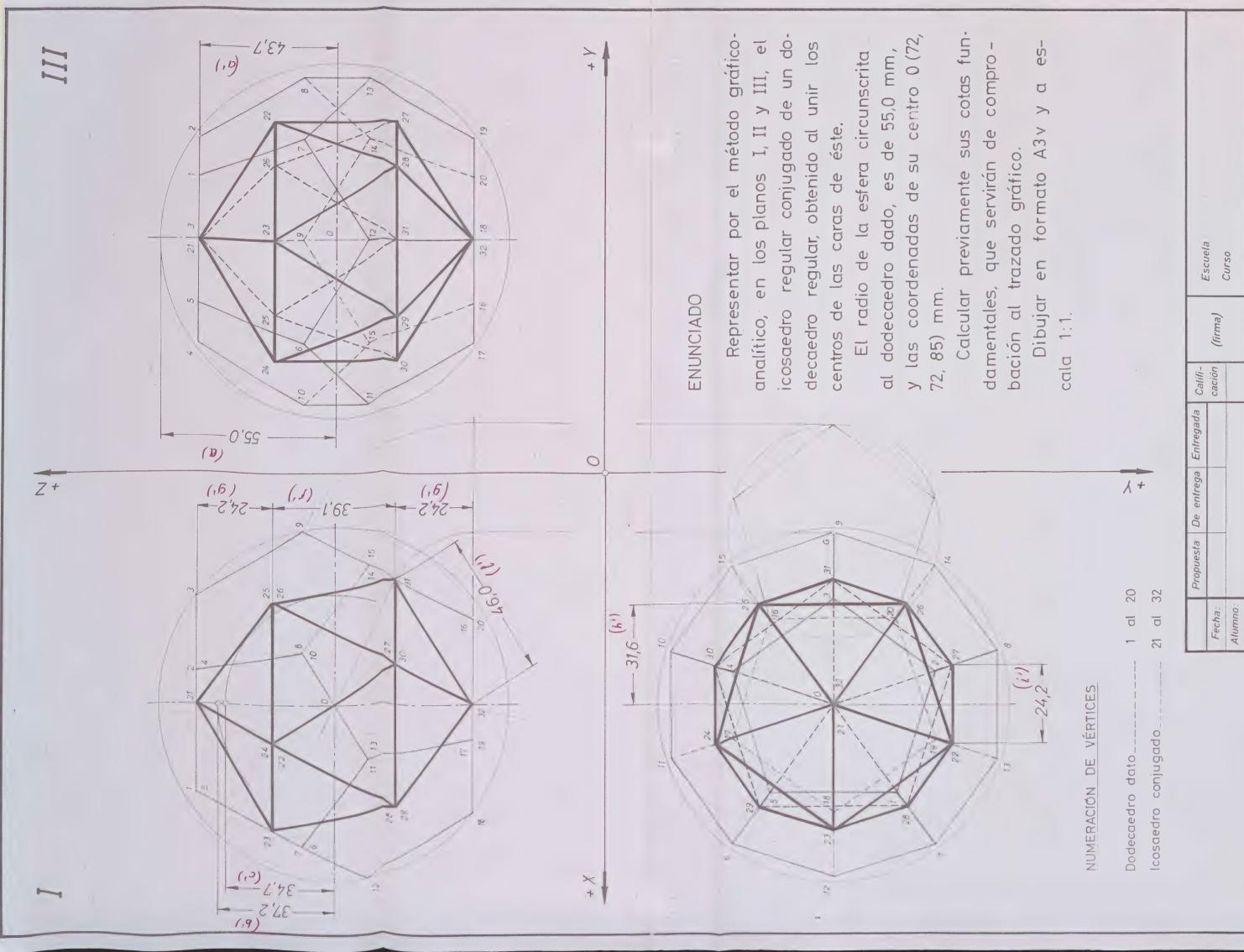
Poliedros regulares convexos conjugados

Escala

Escuela

Lámina

Curso 19

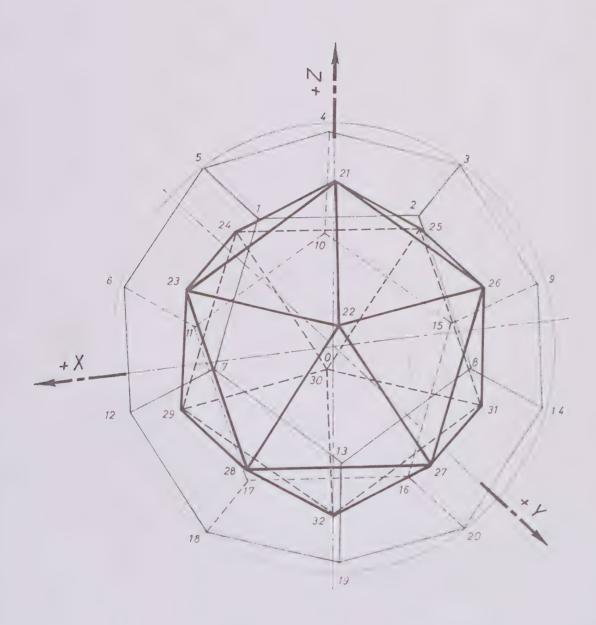


Poliedros regulares convexos conjugados

Escala

Lámina





Poliedros regulares convexos conjugados



Lamina 10

ENLINCIADO

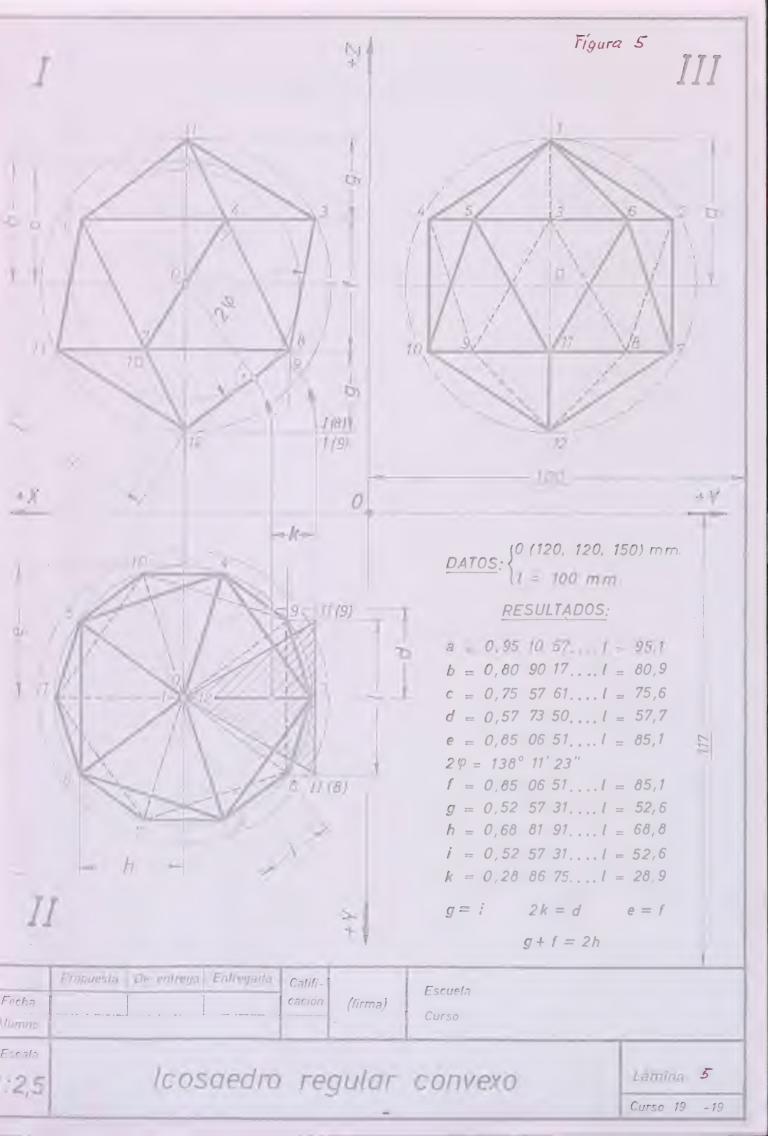
Representar por el cuitodo gráfico-analítico, en los planes. I. II y II., el dodeca edro conjugado de un icosa edro regular, obtenido al unir los centros de las caras de este.

El radio de la esfera circumscrita al icosaedro es de 55,0 mm, y las coordenadas de su cutro 0 (72, 72, 85) mm.

Calcular pren'amente sus cotas fundamentales que serviran de comprobación al trasado granos. Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

0 (72, 72, 85) m m a = 55,0 m m







UNE A4 210 X 25

PROCESO GRÁFICO

Determinar presiduente el lado del icosa edro aequilar, en funcion del radio a de la esfera circumscrita (vor proceso gráfico-analítico de lam. 5); el lado será:

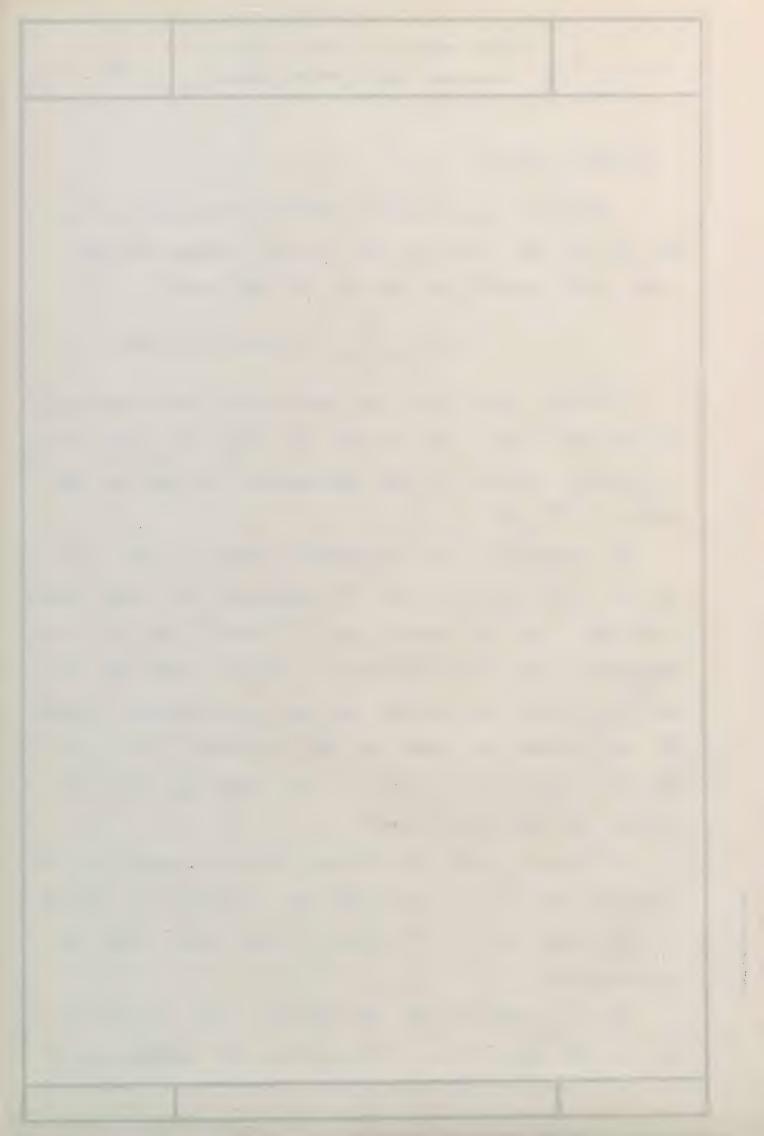
L= 55 = 57,83 03 93 ₹ 57,8 mm

Estimando como punto de partida este lado representes el inseredo dato, de acuerdo con el proceso gráfico de la meneirada lámina 5. Est representación se hará en los planos I, II g II.

do los centros de las caras del icosacedro, los males estan situados en el espacio en el baricentro de an cara cuspectiva (punto de intersección de las medianes); como esta propiedad se conserva un sus projecciones, es projecciones de determinar en cada uno de los planos I, II y III las projecciones de los centros de las caras, que serai los vértices del dodecacedro pedido.

El trasado puede simplificarse terriendo presente que el baricentro de un triangulo esta sobre cualquier mediana a dos tercios de su langitud a partir del vértice coverespondiente.

Una comprobación de este trasado es la corres pondencia de las projecciones de lo vértices del dodecaedro al



obtenue este and soulisulineente en rade persone.

que es conseriente simplificants un al moso gráfico-analítico.

PROCESO GRÁFICO- ANGLÍTICO

estas analíticas calculadas previamente en la forma que a continuación

Observemos previamente que la esfera inscrita en el icosaldro regular es concentrica con la circumscrita, niendo aquilla
tangente
(a las caras del mismo en sus centros respectivos. Por coneigniente calcularemos previamente el radio de la esfera inscrita al icosaecho dado, que vera el de la circumsenta del dodecaedro pedido.

Asi pues tendremos que

C20 - 9/12

mas teniends en cuenta el cálculo de la lamina 5^{2} , ne proféresa: $C_{20} = 0,75$ 57 61 $l_{20} = 0.75$ 57 61 x 57,83 03 93 =

= 43, 70 59 53 mm = a12

El lado del dodeca ed so conjugado. (ver figura 4), ma $\frac{1}{12} = \frac{43.7059.53}{1,4012.59} = 31,1904.88 mm$

con anyo salor pedemos calcular les restantes del doderne-

UNE A4 210 X 297



dis que ne represan a contermación: a' = 1. 40 12 59 x 31, 19 62 88 = 43.7 nm id. = 40,8 "

b' = 1, 30 90 17 x

 $C_{\alpha}' = 1.113516 \times 1.00 = 34.7$

d' = 0,85 06 51 x id = 26.5 "

2 Pp = 116° 33' 54"

e' = 1. 37 63 84 · id = 42.9 "

fi = 0, 52 57 31 x

9' = 0,85 06 51 x

k' = 0,68 81 92 x

id = 16,4 "

id = 26.5 "

1/2 = 0, 85 06 51 x id = 26,5 "

id = 21,45 1

Pour vos valores se verifican las signientes relaciones:

d= 9 = (12 = 26.5 mm

9'+ f = 2 k 26,5 + 16,4 = 2 x 21,45 = 42,9 mm

La relación entre los radios de las esteras circumscritas as icosaedro g dodecaedro conjugado, rera:

$$a_{20} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} l_{20} = 0.95 \ 10 \ 57... l$$

 $a_{12}^{\prime} = c_{20}^{\prime} = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{15}}{12} l_{20} = 0.75 57 61...l$

de doude

$$\frac{a_{20}}{a_{12}'} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} l_{20} : \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{15}}{12} l_{20} = \sqrt{15 - 6\sqrt{5}} =$$

= 1,25 84 09.

[1]



El desarrollo del calculo anterior es el signiente:

$$\frac{a_{20}}{a_{12}'} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} l_{20} : \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{15}}{12} l_{20} = \frac{12\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4(3\sqrt{3} + \sqrt{15})} =$$

$$\frac{3\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{3\sqrt{3}+\sqrt{15}} = \frac{3\sqrt{10+2\sqrt{5}} \times (3\sqrt{3}-\sqrt{15})}{27-15} = \frac{\sqrt{(10+2\sqrt{5})(3\sqrt{3}-\sqrt{15})^2}}{4}$$

$$\sqrt{(10+2\sqrt{5})(27+15-6\sqrt{45})} = \sqrt{(10+2\sqrt{5})(42-18\sqrt{5})}$$

$$= \frac{\sqrt{420 + 84\sqrt{5} - 180\sqrt{5} - 2 \times 18 \times 5}}{4} = \frac{\sqrt{240 - 96\sqrt{5}}}{4} = \sqrt{\frac{240 - 96\sqrt{5}}{16}}$$

El dado l' del dodecaedro conjugado, en funcion del lado l₂₀ del insaedro dado, sua pues:

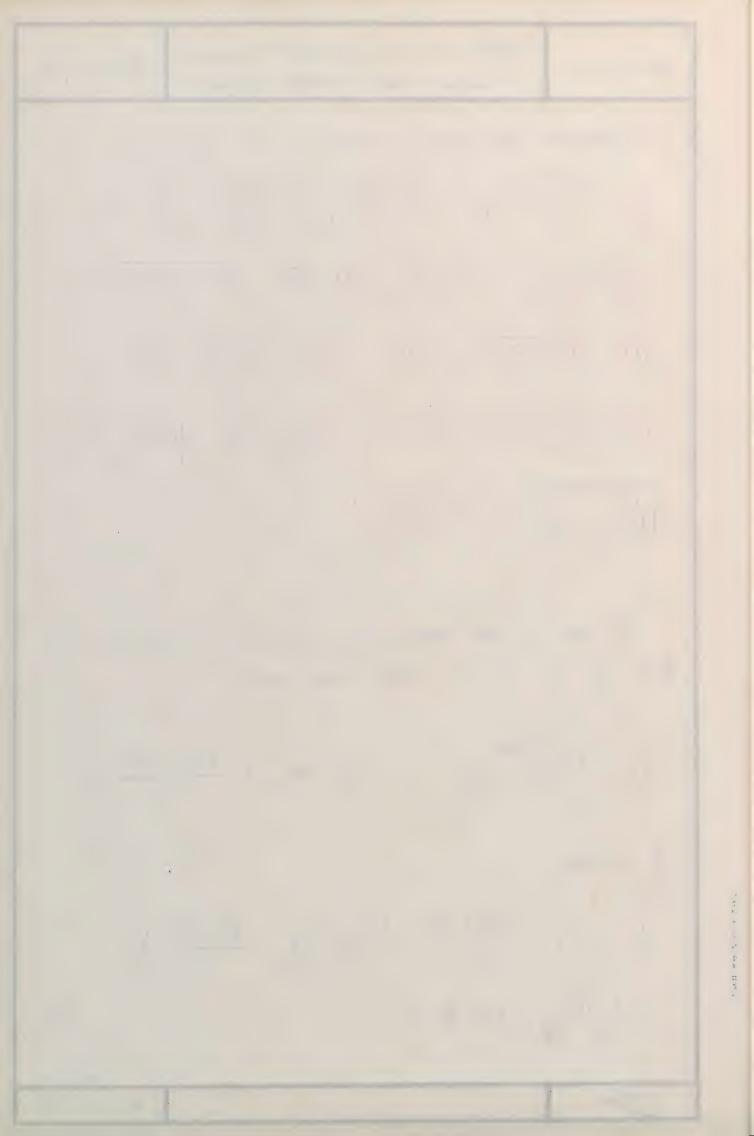
$$a_{20} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} l_{20}$$
 $c_{20} = a_{12} = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{15}}{12} l_{20}$

de amae

$$\ell'_{12} = \alpha'_{12} : \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{15}}{12} \ell_{20} : \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{4} \ell_{20} =$$

$$= \frac{1+15}{6} l_{10} = 0,53 93 50 \dots$$

[2]



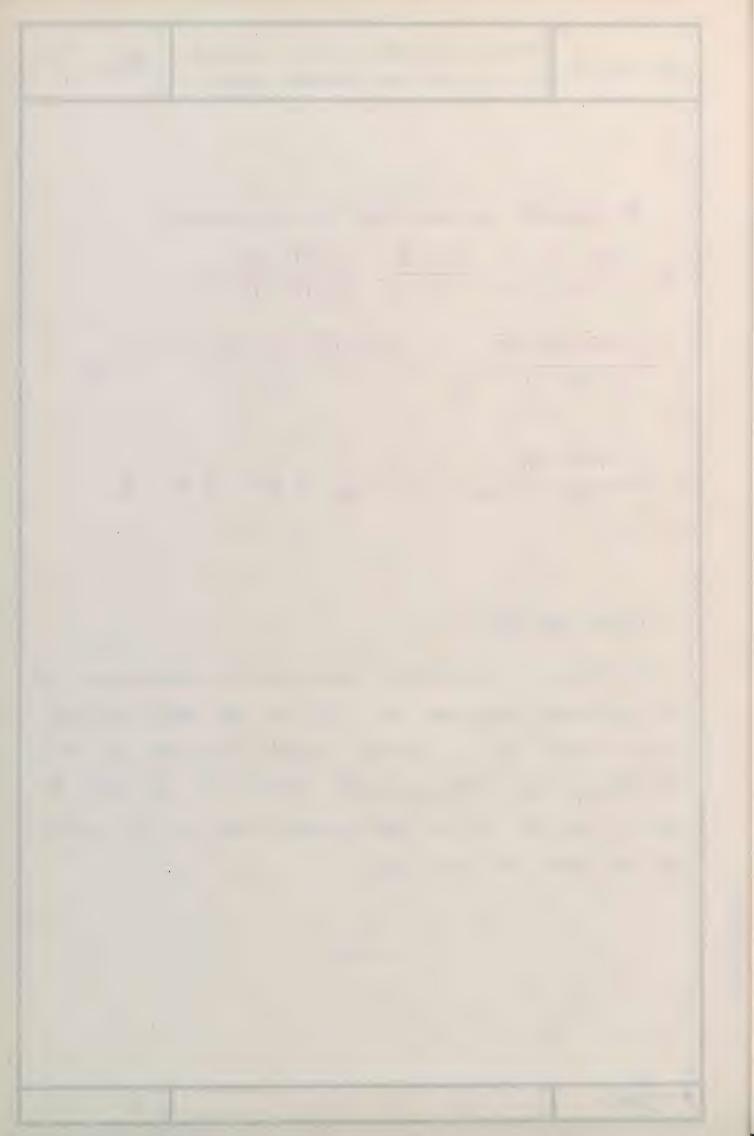
INE A4 210 X 297

El desarrollo de este cálculo es el aigniente: $\ell'_{12} = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{15}}{12} \ell_{20} : \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{4} = \frac{4 \times (3\sqrt{3} + \sqrt{15})}{12 + (\sqrt{15} + \sqrt{3})} \ell_{20} = \frac{(3\sqrt{3} + \sqrt{15})(\sqrt{15} - \sqrt{3})}{3 \times (45 - 3)} \ell_{20} = \frac{3 \times \sqrt{3} \times 3 \times 5}{36} + \frac{15 - 3 \times 3 - \sqrt{3} \times 3 \times 5}{36} = \ell_{20} = \frac{3 \times \sqrt{3} \times 3 \times 5}{36} = \ell_{20} =$

$$= \frac{6 + 9\sqrt{5} - 3\sqrt{5}}{36} l_{20} = \frac{7 + \sqrt{5}}{6} l_{20} \approx 0.53 \ 93 \ 50 \dots l_{20}$$

FIGURA CORPOREA

Le obtience el dodecardos conjugado por aceptamiento de 13 pentojanio aequilares de 31,2 mm de lado, vituado interiormente en un icosardo aequilar formado por 20 caras terranquetares (transparante) de 57.8 mm de lado. de forma que los vértices del primero estén en los centros de las caras del segundo.



Nomenclatura empleada

l', = bado del dodecardo conjugado

a' = Radio de la esfera circumscrita al mismo.

biz = Radio de la esfera tangente a las aristas.

C' = Radio de la esfera inscrita.

de ma cara.

24 = Augus rectelines del diedes francedo por dos caras contigues

E' = Radio de la sissemponenció ciccumsorità al deráque regular, contorno de la nota I.

fi - Altura intermedia del contorno de las vistas I g II.

9'2 - Alturas extremas del contorno de las nietas I g II.

i's = bade del decarrono regular, centoure de la victa II.

k' = Apoterna del poligono de ma cara

= 12 = superfice.

V' = Volumen.

Les values aut une det determent conjugade, pur de ettemente directamente en funcion del lado ℓ_{20} del rioraedes dado, ja que el valor como eido de ℓ'_{12} en función de ℓ_{20} (ver form. [2])



VE A4 210 X 297

na la tendramos:

$$G'_{12} = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{6}\right) \stackrel{?}{?}_{20} = \frac{\sqrt{15} + 3\sqrt{3}}{12} \stackrel{?}{?}_{20}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $a_{20}' = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{4} \times \frac{1 + \sqrt{5}}{6} l_{20} =$

 $=\frac{(\sqrt{15}+\sqrt{3})(1+\sqrt{5})}{24}l_{20}=\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}+\sqrt{75}+\sqrt{15}}{24}l_{20}=\frac{2\sqrt{15}+\sqrt{3}+5\sqrt{3}}{24}l_{20}=$

 $= \frac{2\sqrt{15} + 6\sqrt{3}}{24} l_{20} = \frac{\sqrt{15} + 3\sqrt{3}}{12} l_{20}$

 $b_{12}^{\prime} = \frac{3+\sqrt{5}}{4} \times \frac{1+\sqrt{5}}{6} = \frac{2+\sqrt{5}}{6}$

Desarrollo del cálculo anterior: $b_{12}' = \frac{3+\sqrt{5}}{4} \times \frac{1+\sqrt{5}}{6} \cdot \frac{(3+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})}{24} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{6} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{20} = \frac{(3+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})}{24} \cdot \frac{(3+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})}{24} = \frac{(3+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})}{24} \cdot \frac{(3+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})}{24} = \frac{(3+\sqrt{5$

 $= \frac{3 + \sqrt{5} + 3\sqrt{5} + 5}{24} l_{20} = \frac{8 + 4\sqrt{5}}{6} l_{20}.$

 $C'_{12} = \sqrt{\frac{11\sqrt{5} + 25}{100}} \times \frac{1+\sqrt{5}}{6} l_{20} = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{65 + 29\sqrt{5}}{100}} l_{20}$

Desarrollo del catendo anterior: $C_{12}' = \sqrt{\frac{11\sqrt{5} + 25}{40}} \times \frac{1+\sqrt{5}}{6} l_{20}^{20}$

 $= \sqrt{\frac{(11\sqrt{5} + 25)(1+\sqrt{5})^2}{40 \times 6^2}} = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{(11\sqrt{5} + 25)(1+5+2\sqrt{5})}{40}} l_{20} =$

 $=\frac{1}{6}\sqrt{\frac{(11\sqrt{5}+25)(6+2\sqrt{5})}{40}}\ell_{20}=\frac{1}{6}\sqrt{\frac{(11\sqrt{5}+25)(3+\sqrt{5})}{20}}\ell_{20}=$



$$= \frac{1}{6} \sqrt{\frac{33\sqrt{5} + 76 + 55 + 25\sqrt{5}}{20}} l_{20} = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{130 + 58\sqrt{5}}{20}} l_{20} = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{65 + 29\sqrt{5}}{10}} l_{20}$$

$$d'_{12} = \sqrt{\frac{5+17}{10}} \times \frac{1+\sqrt{5}}{6} \ell_{23} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} \ell_{20}$$

Desarrollo del calculo auterior: d' =
$$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{5}}$$
 \ $\frac{1+\sqrt{5}}{6}$ les

$$= \sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})^2}{10\times6^2}} l_{20} = \sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(1+5+2\sqrt{5})}{10\times6^2}} l_{20} = \sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(6+2\sqrt{5})}{10\times6^2}} l_{20} = \sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(6+2\sqrt{5})}{10\times6^2}$$

$$= \sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{5\times6^2}} l_{20} = \sqrt{\frac{15+3\sqrt{5}+5\sqrt{5}+5}{5\times6^2}} l_{20} = \sqrt{\frac{20+8\sqrt{5}}{5\times6^2}} l_{20} =$$

$$= \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5\times3^2}} l_{20} = \frac{1}{3} \times \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} l_{20}$$

$$e'_{12} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} \times \frac{1+\sqrt{5}}{6} \ell_{20} = \frac{1}{3} \times \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}} \ell_{20}$$

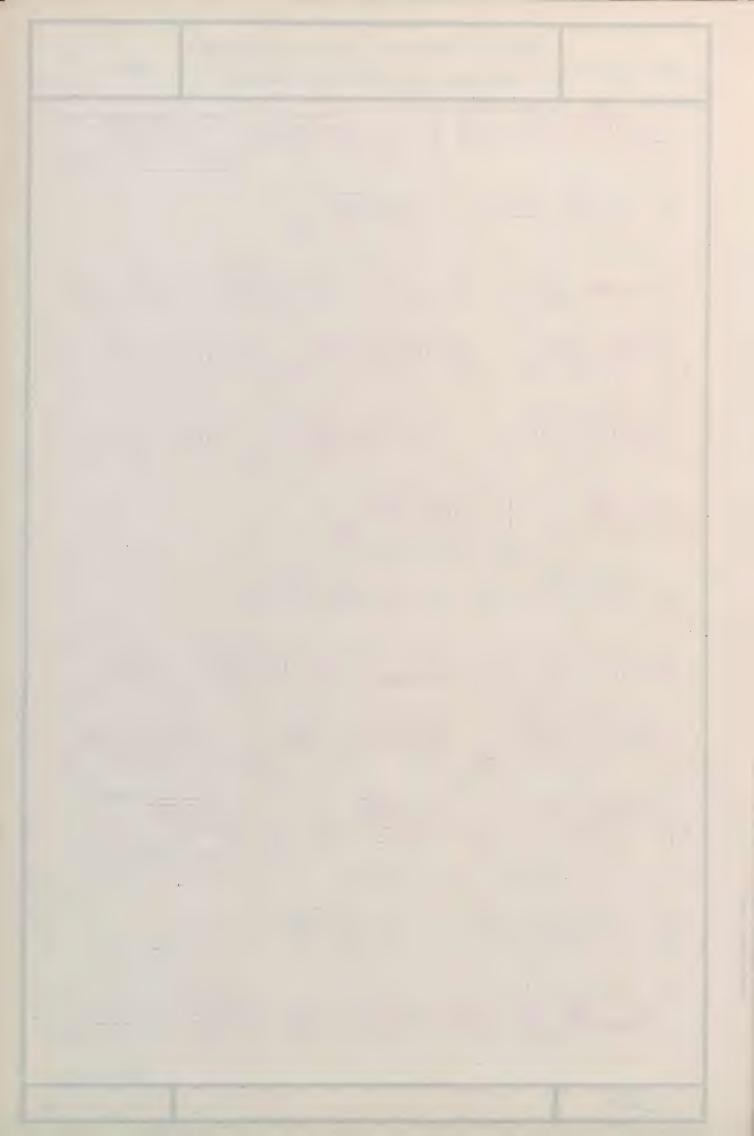
Desarrollo del calculo auterior:
$$e'_{12} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} \times \frac{1+\sqrt{5}}{6} l_{20}$$

$$= \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(1+\sqrt{5})^2}{5\times6^2}} l_{20} = \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(6+2\sqrt{7})}{5\times6^2}} l_{20} = \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{5\times3\times6}} l_{20}$$

$$= \sqrt{\frac{15 + 6\sqrt{5} + 5\sqrt{5} + 10}{\sqrt{5} \times 6}} l_{20} = \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{10 \times 3^{2}}} l_{20} = \frac{1}{3} \times \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{10}} l_{20}$$

$$f'_{12} = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}} \times \frac{1 + \sqrt{5}}{6} \ell_{20} = \frac{1}{3} \times \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}} \ell_{20}$$

Desarrollo del calculo anterior:
$$f_{12}' = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \times \frac{1+\sqrt{5}}{6} l_{20} =$$



$$= \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})^2}{10\times6^2}} l_{20} = \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(1+5+2\sqrt{5})}{10\times6^2}} l_{20} = \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(6+2\sqrt{5})}{10\times6^2}} l_{20} = \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(6+2\sqrt{5})}{10\times6^2}$$

$$=\sqrt{\frac{(5-\sqrt{r})(3+\sqrt{r})}{5\times6^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{5\times6^2}} l_{20} = \sqrt{\frac{15-3\sqrt{5}+5\sqrt{5}-5}{5\times6^2}} l_{20} = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5\times6^2}} l_{20} = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5$$

$$l_{20} = \sqrt{\frac{10 - 2\sqrt{5}}{5 \times 6^2}} \, d_{20}$$

$$= \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{5\times3\times6}} l_{20} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} l_{20}$$

$$g'_{12} = i'_{12} = d'_{12} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{5+21}{5}} l_{20}$$

$$k'_{12} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}} \times \frac{1+\sqrt{5}}{6} \ell_{20} = \frac{1}{6} \times \sqrt{\frac{25-11\sqrt{5}}{10}} \ell_{20}$$

Desarrollo del calculo auterior: k' = \ \frac{5+2\sqrt{5}}{20} \ \times \ \frac{1+\sqrt{5}}{6} \ \lambda_2 =

$$=\frac{i}{6} \times \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(1+\sqrt{5})^2}{20}} l_{20} = \frac{i}{6} \times \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(1+5+2\sqrt{5})}{20}} l_{20} =$$

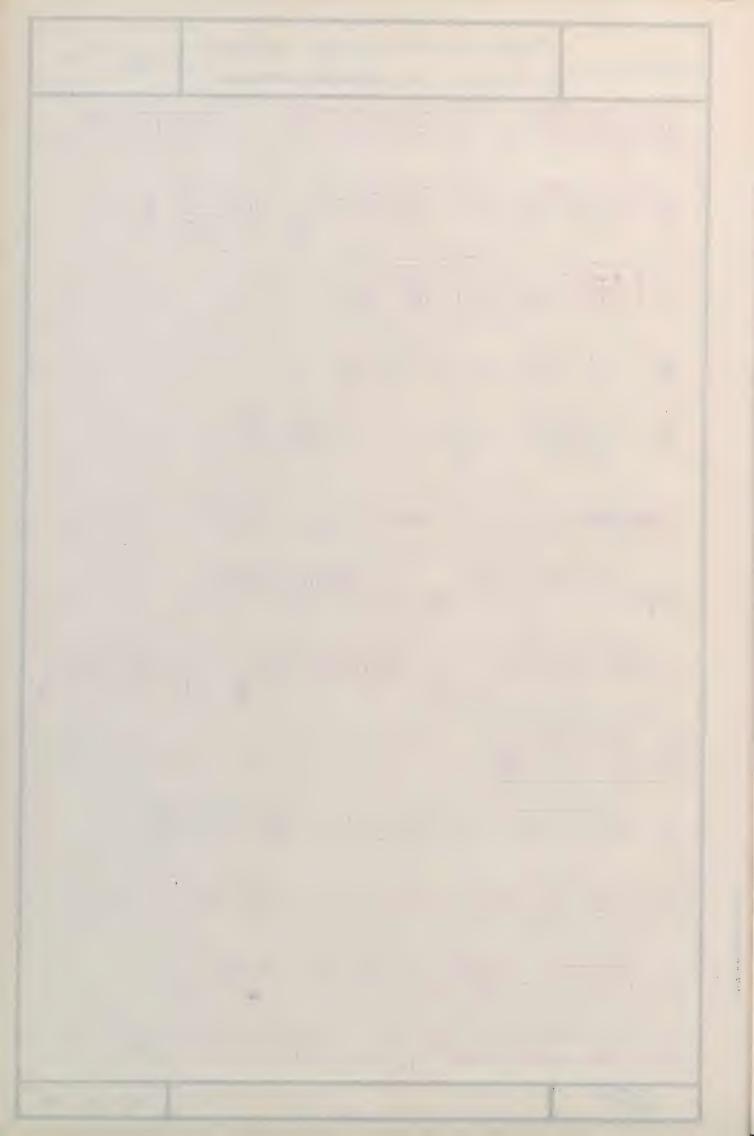
$$= \frac{i}{6} \times \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(6+2\sqrt{5})}{6}} l_{20} = \frac{i}{6} \times \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{10}} l_{20} = \frac{i}{6} \sqrt{\frac{15+6\sqrt{5}+5\sqrt{5}+10}{10}} l_{20}$$

$$S_{12}^{1} = 3 \times \sqrt{25 + 10 \sqrt{5}} \times \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{6} \cdot \frac{1}{20}\right)^{2} = \frac{1}{6} \sqrt{10 \times (65 + 29 \sqrt{5})} \times \frac{2}{20}$$

Desarrollo del calculo anterir: 5' = 3 x \25 + 10 \sqrt{5} x \left(\frac{1+15}{6}\left(\frac{20}{20}\right) =

$$= 3 \times \sqrt{25 + 10 \text{ Vs}} \times \frac{(1 + \text{Vr})^2}{36} \ell_{20}^2 = \sqrt{25 + 10 \text{ Vs}} \times \frac{6 + 2 \text{Vs}}{12} \ell_{20}^2 =$$

$$= \frac{1}{6} \times \sqrt{(25 + 10 \text{ Vs})(3 + \text{ Vs})^2} l_{20} = \frac{1}{6} \sqrt{(25 + 10 \text{ Vs})(9 + 5 + 6 \text{ Vs})} l_{20}^2$$



$$=\frac{1}{6}\sqrt{(25+10\ \sqrt{5})(7+3\ \sqrt{5})}\times2 \quad \ell_{20}^{2}=\frac{1}{6}\sqrt{(175+70\ \sqrt{5}+75\ \sqrt{5}+150)}\times2 \quad \ell_{20}^{2}=$$

$$= \frac{1}{6} \times \sqrt{(325 + 145 \sqrt{5}) \times 2} \quad l_{20}^{2} = \frac{1}{6} \sqrt{10 \times (65 + 27 \sqrt{5})} \quad l_{20}^{2}$$

$$V'_{12} = \frac{7\sqrt{5} + 15}{4} \times \left(\frac{1+\sqrt{5}}{6} \ell_{20}\right)^3 = \frac{65 + 29\sqrt{5}}{108} \ell_{20}^3$$

Desarrollo del calculo auterin:
$$V_{2} = \frac{7\sqrt{5} + 15}{4} \times \left(\frac{1+\sqrt{5}}{6} l_{20}\right)^{3} =$$

$$= \frac{(7\sqrt{5} + 15)(1+\sqrt{5})^{3}}{4 \times 6^{3}} l_{20}^{3} = \frac{(7\sqrt{5} + 15)(1+3\sqrt{5} + 15 + 5\sqrt{5})}{4 \times 6 \times 6^{2}} l_{20}^{3} =$$

$$= \frac{(7\sqrt{5} + 15)(16 + 8\sqrt{5})}{4 \times 6 \times 6^{2}} \ell_{20}^{3} = \frac{(7\sqrt{5} + 15)(2 + \sqrt{5})}{3 \times 6^{2}} \ell_{20}^{2} =$$

$$= \frac{14\sqrt{5} + 30 + 35 + 15\sqrt{5}}{108} l_{20} = \frac{65 + 29\sqrt{5}}{108} l_{20}$$

Lon vitiles las signientes relaciones:

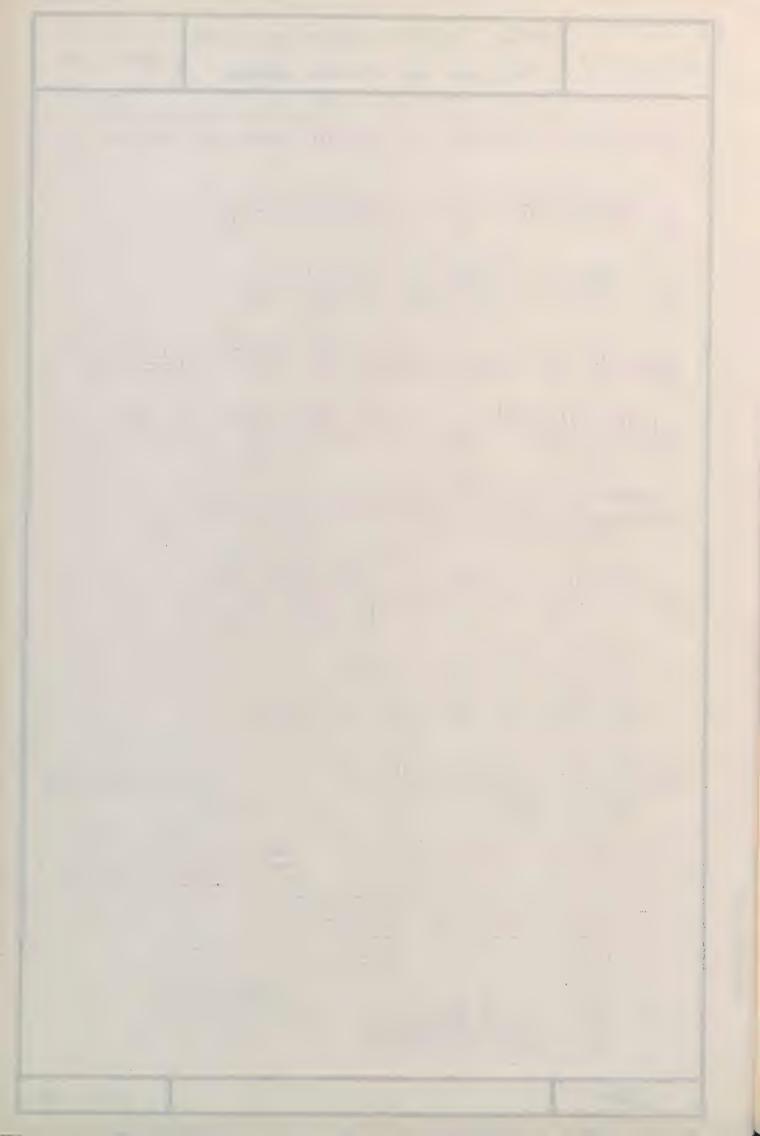
a)
$$\frac{\ell_{20}}{\ell'_{12}} = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{6}} = \frac{3 \times (\sqrt{5}-1)}{2}$$

$$\frac{\ell_{12}}{\ell_{12}} = \frac{3 \times (15 - 1)}{6} = \frac{3 \times (15 - 1)}{2} \qquad (\text{wer firmed } (23))$$

Desarrollo del calculo auterior:
$$\frac{l_{20}}{l_{12}'} = \frac{l_{1+\sqrt{5}}}{6} = \frac{6}{1+\sqrt{5}}$$

$$= \frac{6 \cdot (1-\sqrt{5})}{1-5} = \frac{6(\sqrt{5}-1)}{4} = \frac{3 \cdot (\sqrt{5}-1)}{2}$$

b)
$$\frac{S_{20}}{S_{12}'} = \frac{5\sqrt{3} l_{20}^2}{\frac{1}{6}\sqrt{10} \times (65 + 29\sqrt{5}) l_{20}^2} = \frac{3\sqrt{6} \times (65 - 29\sqrt{5})}{2}$$



 $= \frac{3\sqrt{30}(65 + 29\sqrt{5})(65 - 29\sqrt{5})^2}{4225 - 4205} = \frac{3\sqrt{30}(4225 - 4205)(65 - 29\sqrt{5})}{20}$

 $\frac{3\sqrt{30}\times20\times(65-29\sqrt{5})}{20} = \frac{3\times10\sqrt{6}\times(65-29\sqrt{5})}{20}$

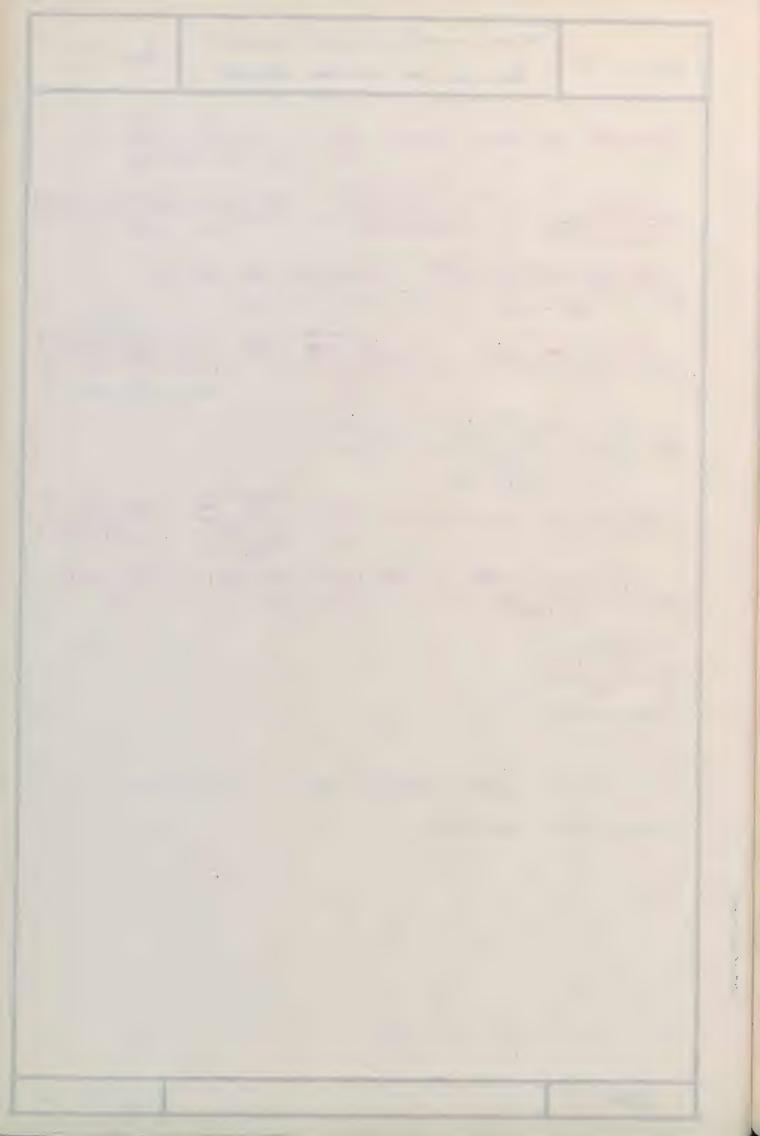
c) $\frac{V_{20}}{V'_{12}} = \frac{\frac{15 + 5\sqrt{5}}{12} \ell_{20}^3}{\frac{65 + 29\sqrt{5}}{108} \ell_{20}^3} = \frac{9 \times (25 - 11\sqrt{5})}{2}$

Jesarrollo del calculo anterio: $\frac{V_{20}}{V_{12}} = \frac{\frac{15+5\sqrt{5}}{12} l_{20}^2}{\frac{65+29\sqrt{5}}{108} l_{20}^2} = \frac{108 \times (15+5\sqrt{5})}{12 \times (65+29\sqrt{5})}$

 $\frac{9 \times (15 + 5 \sqrt{5})(65 - 29 \sqrt{5})}{65^{2} - (29 \sqrt{5})^{2}} = \frac{9 \times (975 + 325 \sqrt{5} - 435 \sqrt{5} - 725)}{4225 - 4205} = \frac{9 \times (250 - 110 \sqrt{5})}{20}$

= \frac{9 \times (25 - 11\busin 5)}{2}

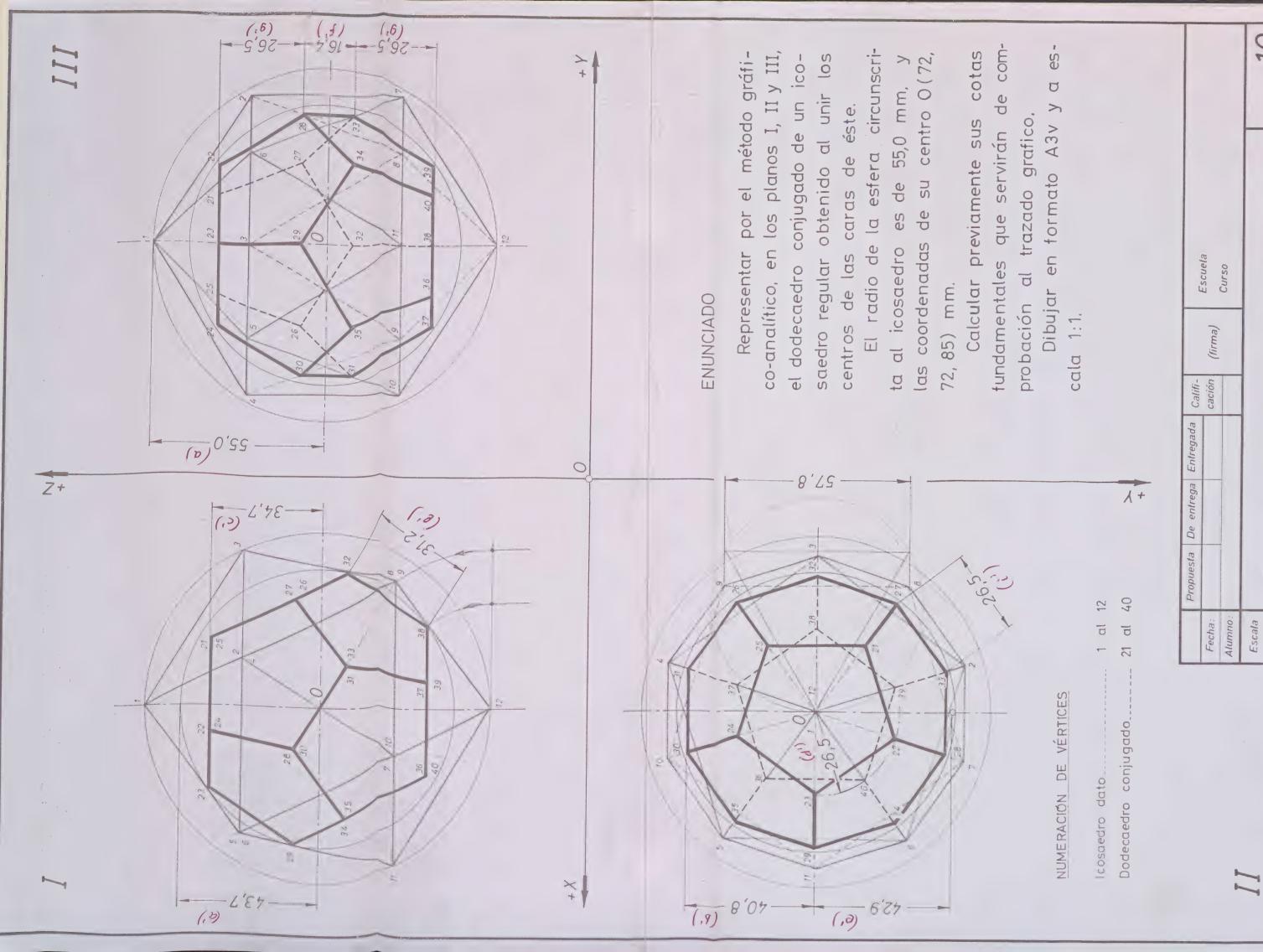
En el enadro sinóplico dado a continuación, resu-



CUADRO SINOPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal oproximado
(1091 1 12	1+V5 l20	0.53 93 45 l ₂₀
(110) a'12	V15 + 3 V3	0, 75 57 61 100
(111) 6/2	2+V3 6 l20	0, 70 60 11 l ₂₀
(1/2) C'12	$\frac{1}{6} \times \sqrt{\frac{65 + 29 \sqrt{5}}{10}} l_{20}$	0, 60 05 69 l ₂₀
(13) d'12	$\frac{1}{3} \times \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} l_{20}$	0, 45 87 94 120
(114) 2 412	Sen $\psi = \sqrt{\frac{5+15}{10}}$	sen $\Psi_2 = 0.85 \ 06 \ 51$ 2 $\Psi_{12} = 116° \ 33' \ 54,2"$
(175) e'12	3 × \ 25 + 11 \(\frac{1}{3} \)	0,74 23 44 120
(176) fi2	$\frac{1}{3} \times \sqrt{\frac{5+1\overline{5}}{10}} l_{20}$	0. 28 35 50 - l ₂₀
(177) 9/12	$\frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} l_{20}$	0, 45 87 94 {20
(118) .,	$\frac{1}{3} \times \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}} \mid_{20}$	0. 45 87 94 100
(119) k12	$\frac{1}{6} \times \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{10}} l_{20}$	0, 37 11 72 l ₂₀
(120) S'12	1/6 × 10 × (65+29 V5) 1/20	6,00 56 91 (20
(121) V'12	65 + 29 V5 108 \(\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc	1, 20 22 78 l ³
Relaciones entre magnitudes		
120: 1/12	3×(V5 - 1)	(122) 1. 85 41 02
S20 : 5/2	3 · V6 · (65 - 29 Vs) 2	(123) 1, 44 20 08
V20: V/2	9 . (25 - 11 \(\sigma\)	(124) 1, 81 46 35





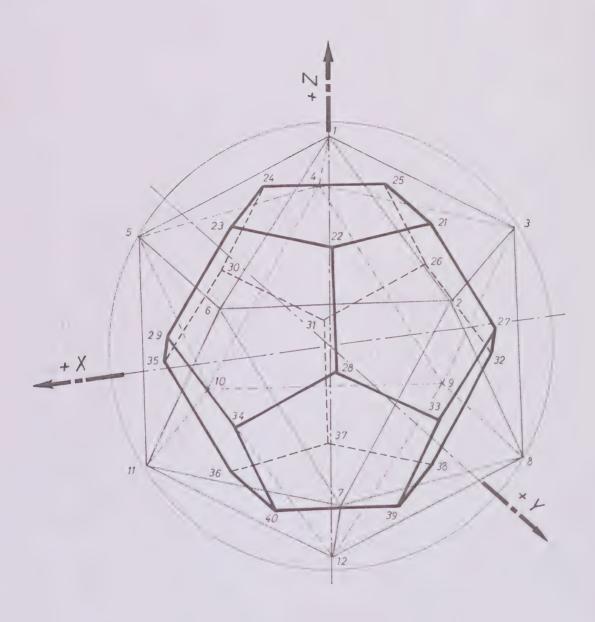
Poliedros regulares convexos conjugados

1:1

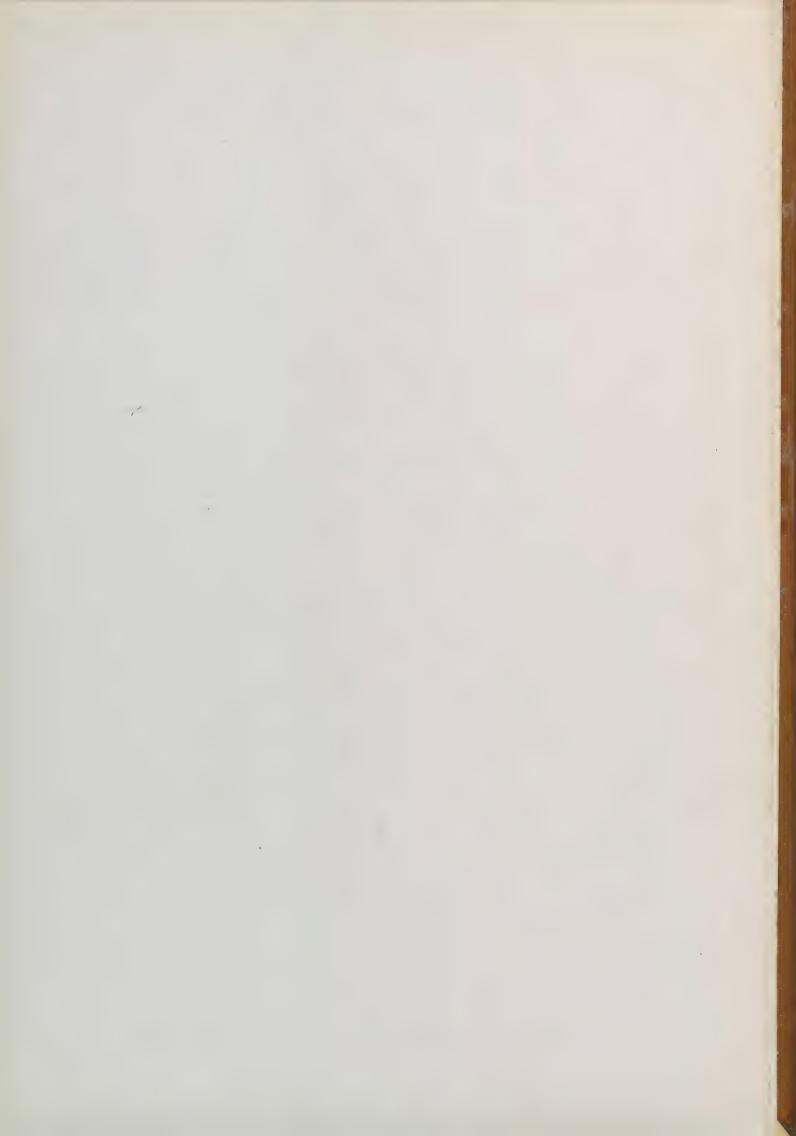
Lámina 10

Curso 19





Poliedros regulares convexos conjugados



15 n as !!

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los plamis I, II , II. I traedro conjugado de un tetraedro regular de 89.8 mm de lado, obtenido aquel al trasar por los
puntos medios de las aristas del tetraedro dado, rectas per pendimens al plano de terminado por cada uma de sus aristas
o el centro O del mismo, cuyas coordenadas son O (72, 72,

Calcular prenamente sus votas fundamentales que serviran de comprobación al trasado gráfico.

Dibujar en formate A3v g a cicala 1.1

DATOS 0 (72, 72, 85) m m



En les làmines 6 a 10 hemos estudiades los poliedres regulares, obtenides aquellos al muis los centres de des mas contigues de estos.

terior, con las mismas formas, pero de diferentes dimensiones.

Aní pues, en estos muesos procesos, el conjugado del tetracdio argular sua otro tetracdio argular; el del exactio, un ortactio; el del ortactio, un escatdro; el del doderardis, un icosactio j, finalmente, el del icosactio, será un doacactro (todo:

regulares j convexos).

compagnedes de la requience, desamblado en las lacommas 11-13-14-16-17, conseiste en trasar por los puntos
medios ete las arestas etel polícides dado, rectas perpendiculares al pluso determinado se dichas asistas
y el centro del polícideo dado.

commer su centro y la estra Tompente a las aristes de ambos.



El poliedro conjugado de un tetraccho regular, es etro tetraccho también regular.

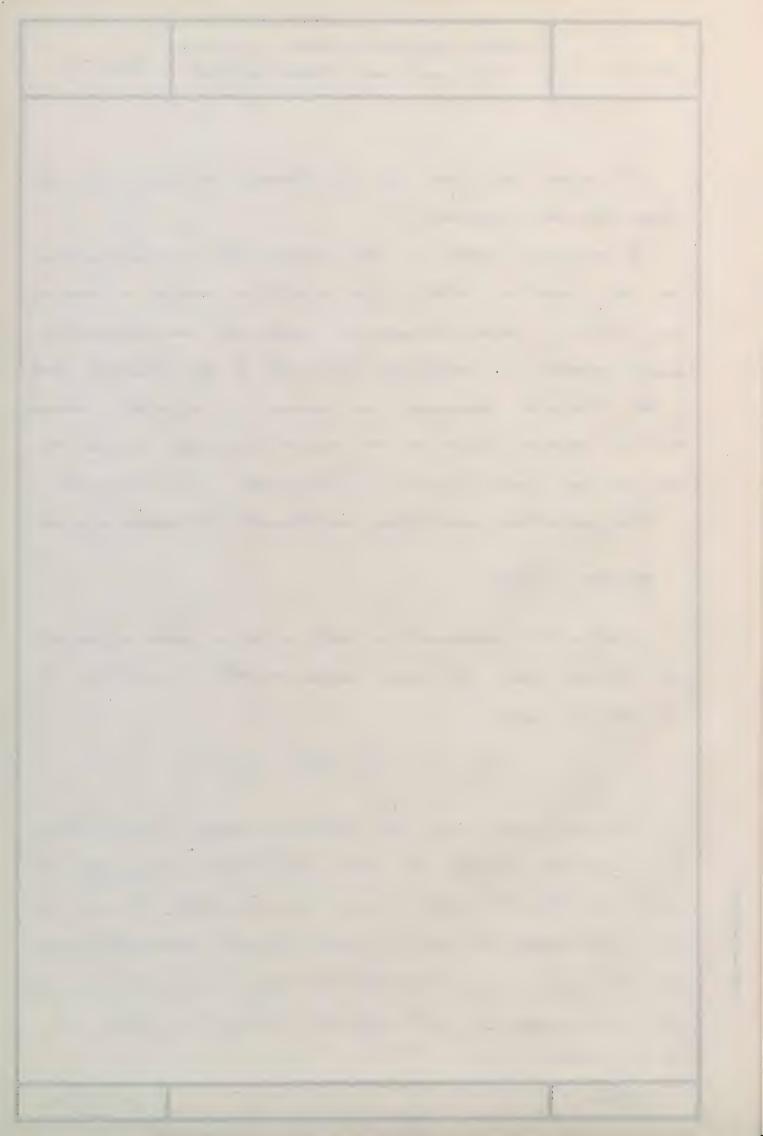
El conjugado pedido con las condiciones del enunciado, es a sur vee ignales o perpendiculares, ce cortan en sus importares punte modire. In consequente, el centro O del tetra des draco o del tetra edro conjugado, es comina o la esfera circumscrita al primero lo es a su vee al segundo; ignal ocurre con la esfera tangente a las arietas o la inscrita.

PROCESO GRÁFICO

Determinar prenamente el cadio a de la esfera circumscrita al tetra mo duas (ne pereso gráfico-analitero de la lam. 1); el cadio a será:

a = 0,61 23 72 x 89,8 = 55,0 mm

Tourando como punto de partida el centro 0 en el plano II. ¿ converido el lado, la comotucción de la projección so los II del tetra edro dado 1-2.3-4 es inmediata. En el placro I determinese el punto 4 sobre la esfera circumscrita, que dista del 1 la magnitud del lado dado, con lo enal se completa dicha projección. La projección sobre II, se deduce de la I y la II.



do em meresto an ceniro o as la espera cercumocrita, cuya propiedad se conserva en sus proyecciones; ello permite romptetar la figura con el conjugado pedido.

PROCESO GRAFICO - ANALITICO

El cálculo analítico de las magnitudes acotadas en la figuca, referente al poliedes conjugado, es identico al desarrollado en la lámina 1, cuyos valores reproducionos, tomando como exacts el rada de la espera urcunscrite, con 55 mm.

> 1 - 55 : 0,61 23 72 - . = 89, 81 46 88 .. mm a = 0.61 23 72 x 89,81 46 88 = 55,0 mm th = 0.35 35 53 x id = 31.8 " c' = 0, 20 4/ 2% . id = 18,3 d' = 0,57 73 50 , id = 51,8 2 4 = 70 " 31 43 " ky = 0,28 80 75 x id = 25,9 " h' = 6,81 Eh 97 x id = 73,3 "

FIGURA CORPÓREA

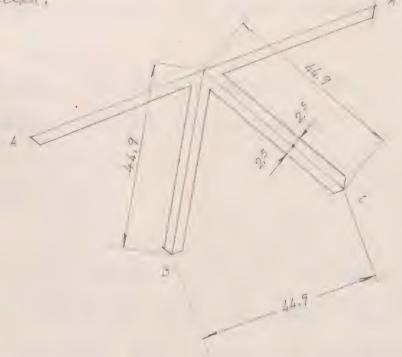
El tetraedro conjugado se obtieve por acoplana. de 4. trianquelos equilateros de 89.8 mm de lado.
El tetraedro dado se el trem formando presament 4 sinamides trianquelanes (transporter o sin toro), cuyas

UNE A4 210 X 2



caras laterales son triangulos equilatiros de 44,9 mm de lado (mitra del lado dato); estas promundes as asspersas estre cada uma de las matro caras del commençado de forma
que sus vertices estem en los puntos emedios de las aristes de
aquel.

las caras transportes de las 1 manueles transportes, par las el terridas requis el tracado que se represente a continuación:



it mates promise in a constant of the decision of the constant of the constant



Morjes a 5

RESUMEN DEL CALCULO DE MAGNITUDES DE ESTE EJERCICIO

Nomenclatura empleada:

l' = bado del tetracdio ampurado

a' = Radio de la esfera circumscrita al mismo.

b', = Radio de la esfera tangente a las aristas.

C' = Radio de la estera inscrita

d' = Radio de la circumperancia arcamenta ai premis de una cara.

29, = Angulo cectilines del diedro formado por do cecas contiguas.

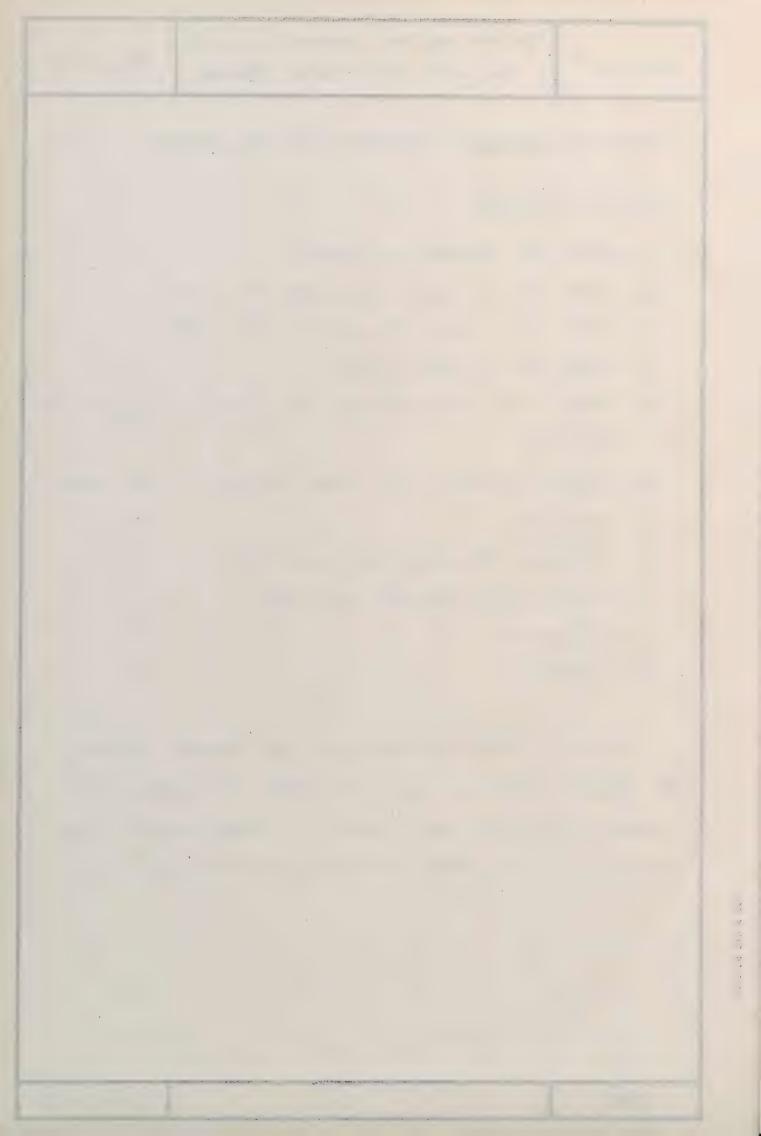
k'4 = Apotema del poligono de una cara

h's = Altura del tetraedro conjugado

5' = Imperficie

V' = Volumen.

Liendo el tetraedro conjugado del tercerto regular. de ignal dimension que el dado, los valores del cuadro enopéro que damos a continuació en ignales a la dados en el de la lamina!



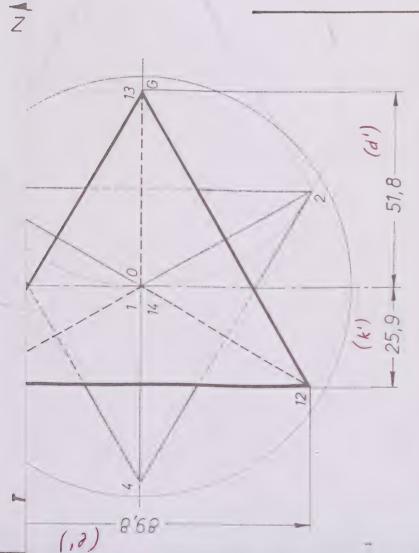
Wy 1 - - E

CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto		Valor decimal aproximado
1'4	(125)	1 14	1, 00 00 00 14
a'u	(126)	<u>6</u> 14	0, 61 23 72 14
b'4	(127) V	2 (4	0, 35 35 53 L ₄
C'A	(128) V	6 /4	0.20 41 24 14
d'4	(129) V	3 64	0,57 73 50 14
24	(130) Sen	$\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$	sen $\Psi_4 = 0.577350$ 2 $\Psi_8 = 70^\circ 31' 43.4''$
k'	(131)	13 L4	0, 28 86 75 4
h'4	(132) V	6 14	0,81 64 97 64
5'4	(133) V	3 42	1, 73 20 51 14
V4	(134) V	$\frac{\sqrt{2}}{12}$ l_{μ}^{3}	0.11 78 57 12
Relaciones entre magnitudes			
(135) $l_4: l_4' = 1$ $S_4: S_4' = 1$ $V_4: V_4' = 1$			

UNE A4 210 X 297





JUMERACIÓN DE VÉRTICES

1+

III, el tetraedro conjugado de un tetraedro regular de 89,8 mm de lado, obtenido aquél al trazar por los puntos medios de las aristas del tetraedro dado, rectas perpendiculares al plano determinado por cada una de sus aristas y el centro O del mismo, cuyas coordenadas son O (72, 72, 85) mm.

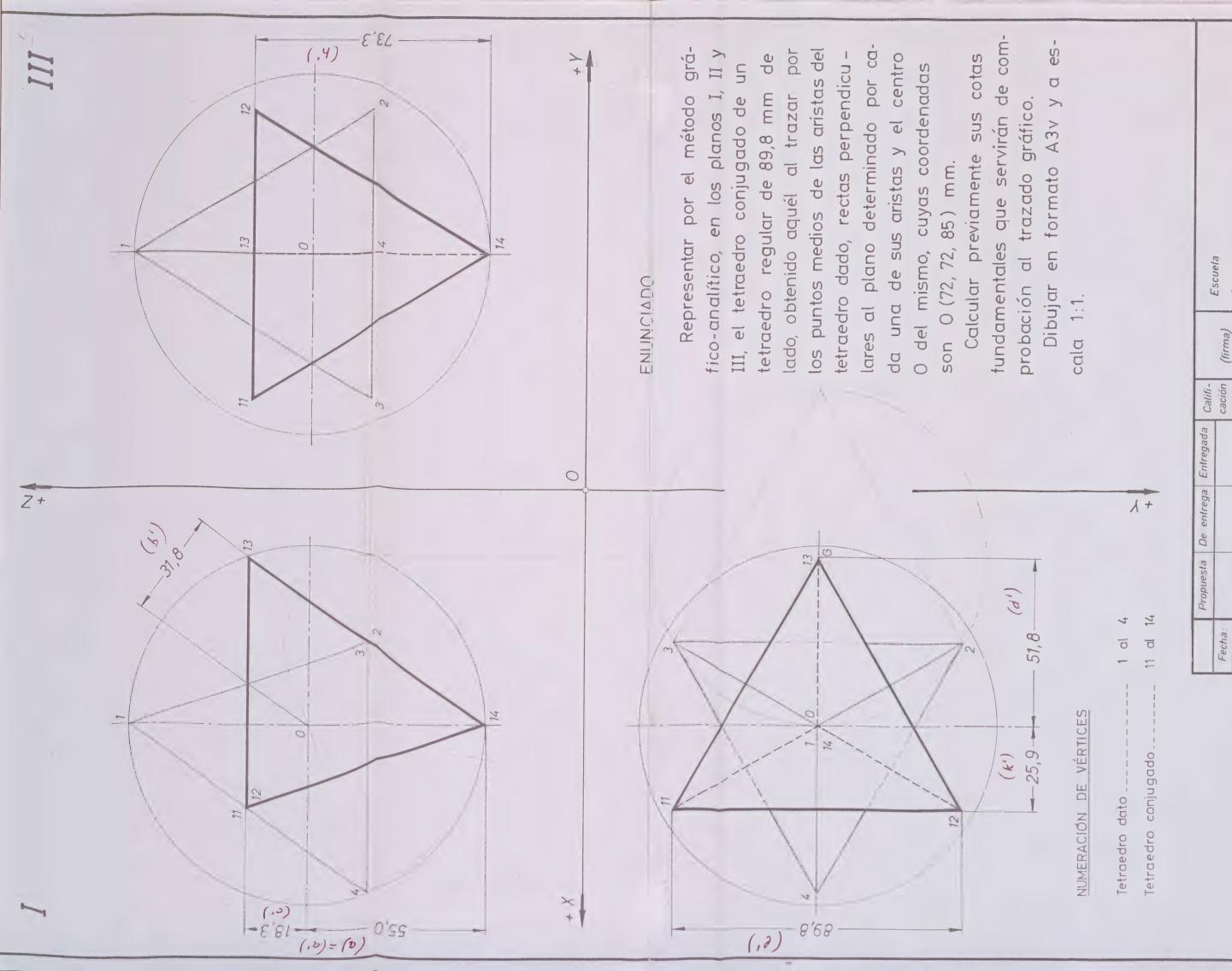
Calcular previamente sus cotas fundamentales que servirán de comprobación al trazado gráfico. Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

	Escuela	Curso		Poliedros regulares convexos conjugados	
	(firma) Co			convexos	
Califi-	cación		-es		
Propuesta De entrega Entregada Califi-				regulai	
De entrega				dros	
Propuesta				Polie	
	Fecha:	Alumno:	Escala	1:1	

- 19

Curso 19

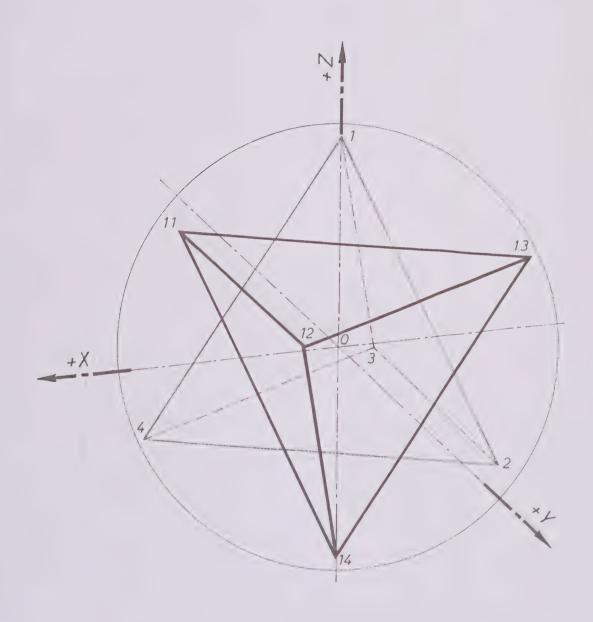
Lámina



Poliedros regulares convexos conjugados Curso (firma) Escala Fecha: Alumno. 1:1

Lámina II Curso 19 - 19





Poliedros regulares convexos conjugados



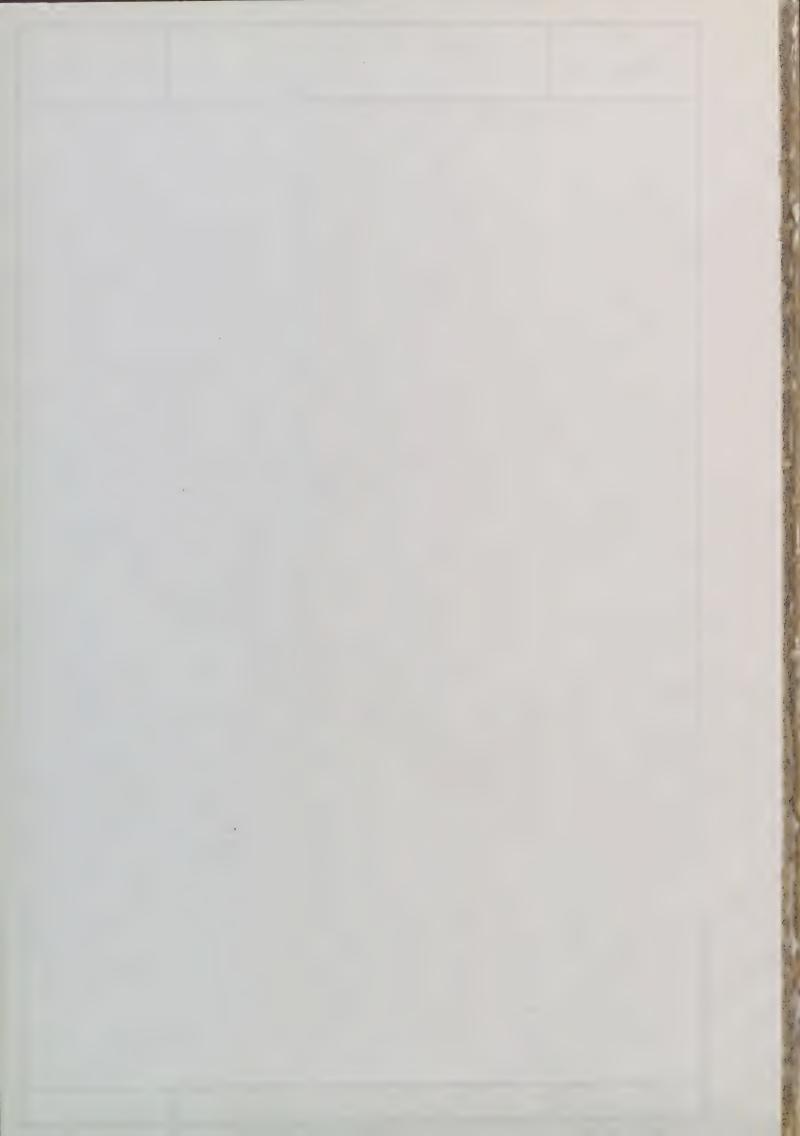
Lamina 12

E municia do

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el poliedro obternido por la intersección de los dos poliedros conjugados representados en la lámima 11.

Dibujar en formato A3V y a escala 1:1

DATOS 0 (72, 72, 85) ... m $\frac{1}{4} = 89.8 \text{ m. m}$ $\frac{1}{4} = 89.8 \text{ m. m}$



tetrae de regular con su conjugado (similias con aespecto de centro del tetrae dro dado), se obtiene completando el trae a do de la lamina 11, con los triangulos que en an al ser contado cada angulo sólido del tetrae de dado pe las casas del consegado. Les esteres ecciones seran pues de triangulos equiláteros cuyos virtices estaran en los punto.

El Proceso gnático y el "Proceso gráfico-analítico" de la mencionada lamina 11 sirve ignalmente para este ejer-

FIGURA CERFORES

Le obtiene por acoplamients de 8 piramides rectas (sin base) compressta cada una de 3 trianqueles equilateres de 44,9 mm. de lado. $\left(\frac{l_4}{2}\right)$.

Este poliedro es concavo, ya que la prolongazon de sono de enalquier cara de uno es la tetrandio, de se distintos semiespacios a los réstices ou sino.



Hope .. 2

CALCULO DE MAGNITUDES DE ESTE POLIEDRO

& = Angulo rectilines del diedre formado por des caras monute,

El diedro X, formado por una cara cualquiera del tetraldro dado, con la cara secante del conjugado, es suplementario del diedro 24 del tetrardro cernelas; su valor sea pues:

Formula 135, 1 \(\alpha = 180 - 24 = 180 - 70° 31' 43,4" = 109° 28' 16.6" [1]

S = Drea lateral en funcion de la

ba superficie lateral està compuesta por 8 x 3 = 24

trianquel. equilateros de lade l' = \frac{\lambda}{2}; por consignie.

te su valor rerà:

$$S = 24 \times \left(\frac{\ell'_{4}}{2}h'\right) = 24 \times \left[\frac{l'_{4}}{2} \times \left(\frac{\ell'_{4}}{2}\sqrt{3}\right)\right] = 24 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\ell'_{4}\right) = 6\sqrt{3}\left(\frac{l_{4}}{2}\right)^{2} = 6\sqrt{3}\left(\frac{l_{4}}{2}\right)^{$$

Formula 135,2
$$\frac{3\sqrt{3}}{2}$$
 $l_4^2 = 2,598076... l_4^2$ [2]

V = Volumen ou funcion de la

tambien de la do (14). Is dues tendremos:

Formula 135,3

$$V = \frac{\sqrt{2}}{3} \times \left(\frac{l_4}{2}\right)^3 + 2 \times \frac{\sqrt{2}}{12} \left(\frac{l_4}{2}\right)^3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{24} + \frac{2\sqrt{2}}{96}\right) l_4^3 = \left[\frac{\sqrt{2}}{2} l_4^3 = 0.776777...l_4^3\right]$$

Sam. 3, formula 24 ban. 1. tomme 9

(3)



tersección de los dos poliedros conju-

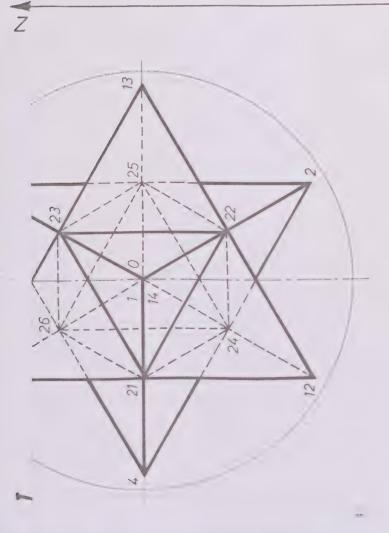
III, el poliedro obtenido por la in-

co-analítico, en los planos I, II

gados representados en la lámina 11.

Dibujar en formato A3v y a es-

cala 1:1.



NUMERACIÓN DE VÉRTICES

Tetraedro dato

Tetraedro conjugado_________11 al 14

Núcleo (octaedro regular)____ 21 al 26

1+

Escuela			
(firma)			
Califi-	cación		
Entregada			
De entrega			
la			

Propues

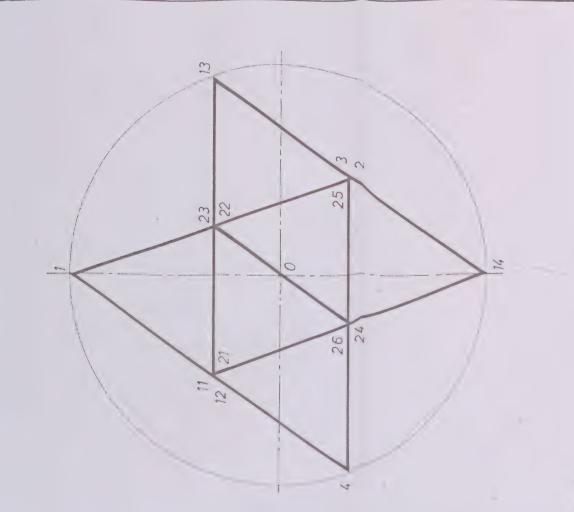
Fecha:

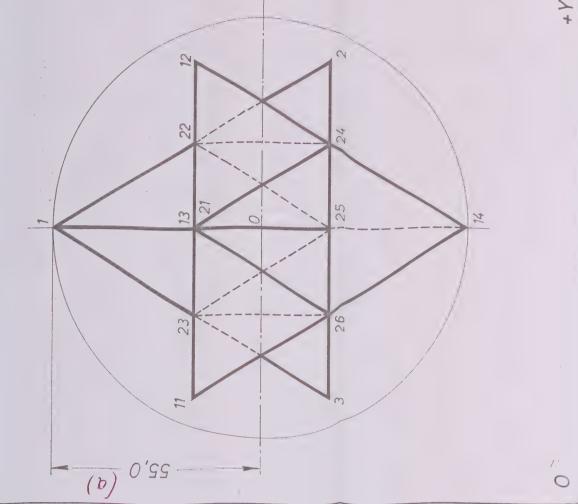
		convexos conjugados
		convexos
		regulares
		Poliedros
Alumno:	Escala	1:1

Lámina 12

urso 19 - 19

Z+



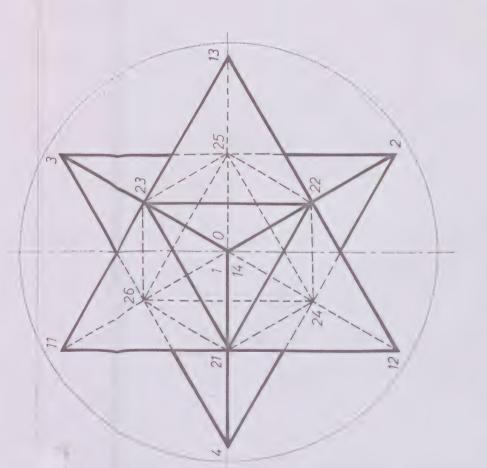


ENUNCIADO

\ +

tersección de los dos poliedros conju-III, el poliedro obtenido por la ingados representados en la lámina 11. Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y

Dibujar en formato A3v y a cala 1:1.



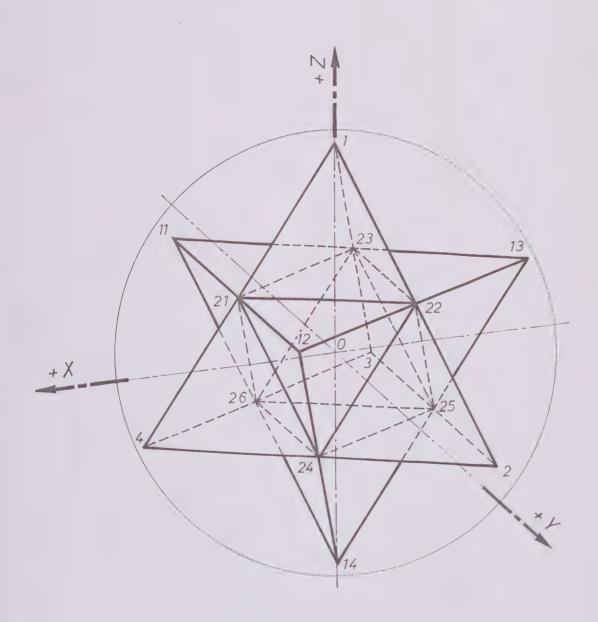
NUMERACIÓN DE VÉRTICES

26 14 <u>a</u> 21 Núcleo (octaedro regular)... Tetraedro conjugado_____ Tetraedro dato....

1+

Entregada Califi-	cación (firma)	CUTSO	Poliedros regulares convexos conjug
Propuesta De entrega Entregada Califi-			Poliedros r
	Fecha:	Alumno:	Escala 1:1





Poliedros regulares convexos conjugados

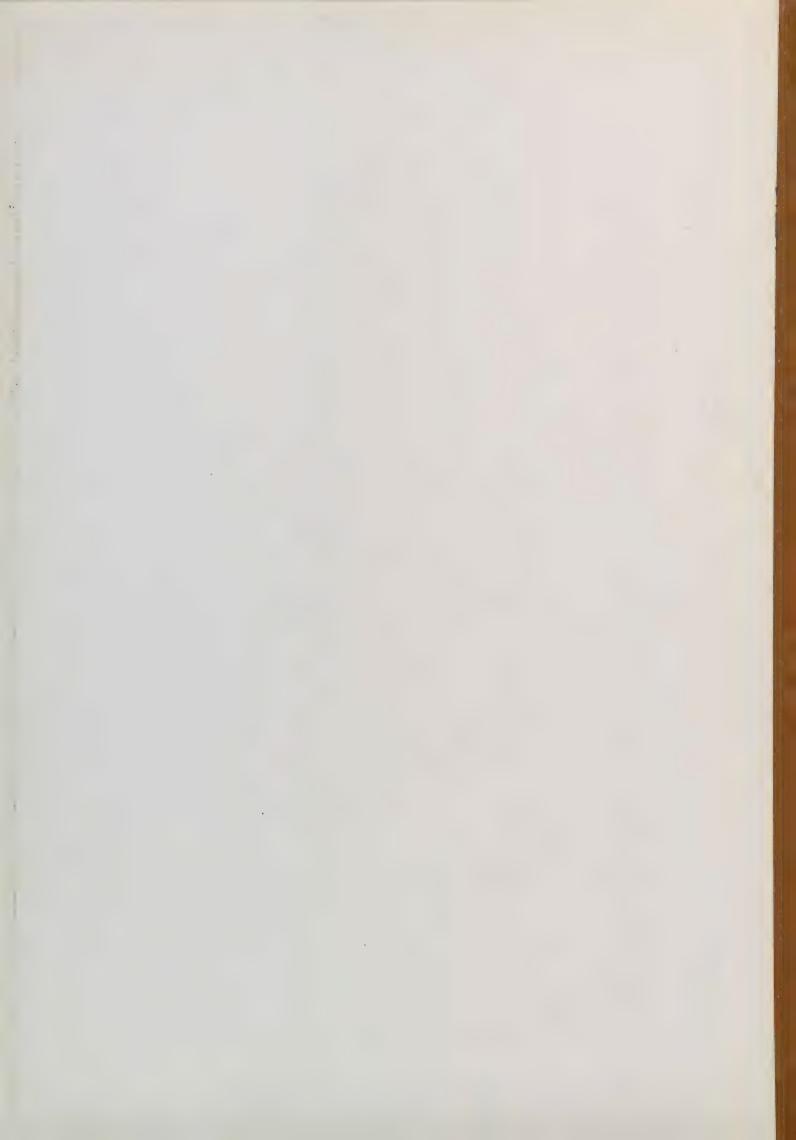


Lámina 13

ENUNCIADO

planos I, II g III, el octaedro conjugado de un exaedro cegular de 55,0 mm de lado, obternido aquel al trarar por los puntos medios de las aristas del exaedro dado, rectas perpendiculares al plano determinado por cada una de sus aristas g el cenho O del misomo, cuyas coordenadas son: O (72, 72, 85) mm.

Calcular previamente sus cotas fundamentales que serviran de comprobación al trasado gráfico.

Dibujar en formato A3V j a escala 1:1

 $\frac{DATOS}{6} = 55 mm$



El poliedro conjugado de sur esacdes aegular es un stacdro aegular; los centros de ambos poliedros son coincidentes.

El conjugado pedido con las condiciones del enunciado tiene sus aristas per pendiculares a las del exacteo, y ambas se cortan en ens ponto medios. Por consigniente, la esfera Tangente a las aristas de ambos poliedros, es común, y el punto de contacto de dicha esfera con las aristas es precisamente el punto de interseccion de las mismas.

Por otra parte, si proyectamos ortogonalmente los vértices del estación compressor. More las respectos en el centro de cada cara madrada del mandro.

Estas propiedades mos permiten cosolver faicilmente la ce-

PROCESO GRÁFICO

Tracederente prinamente a la « a sur con del escardre daen la pluros 2, II y II) do l'anyo lado, en escala, es au 55.2 e.m. Fora elle entelles cemos el tracado dado en el "Proceso gráfico" de la lámina 2.

Jegnidamente, completaremos en el plano I la progección del vetardo hadrás, cuyo conterne es un enadrado cuyo. Lados son perpendiculares a las diesendes del madrado progrección del escardo sen II, pasando declas, lados por los vertices del mirmo.



Oblinion de prosección sera I del octardos selas, de deduce ficilmente la perferciones del minuo sobre I g II (ignoles) ari como el sado del cotacolos y notro de la estera circumerite que se obtience en su verdadesa magnitud

Con la numeracion adecuada de los vértices y centro de amés, préseders que dera completada la cepresentación pedida.

PROCESO GRAFICO-ANDLÍTICO

El critures analítico de las magnitudes acetadas en la lamina 13 si desamble terandore en el ejectuado en la lamina 3, en funcion del lado l' del octardo compregado.

Treviamente se determinarà el radio a'g de la esfera circunescrità al mismo, terrendo en cuenta la squaldad, un ambos poliedros, del radio de la esfora tangente a las

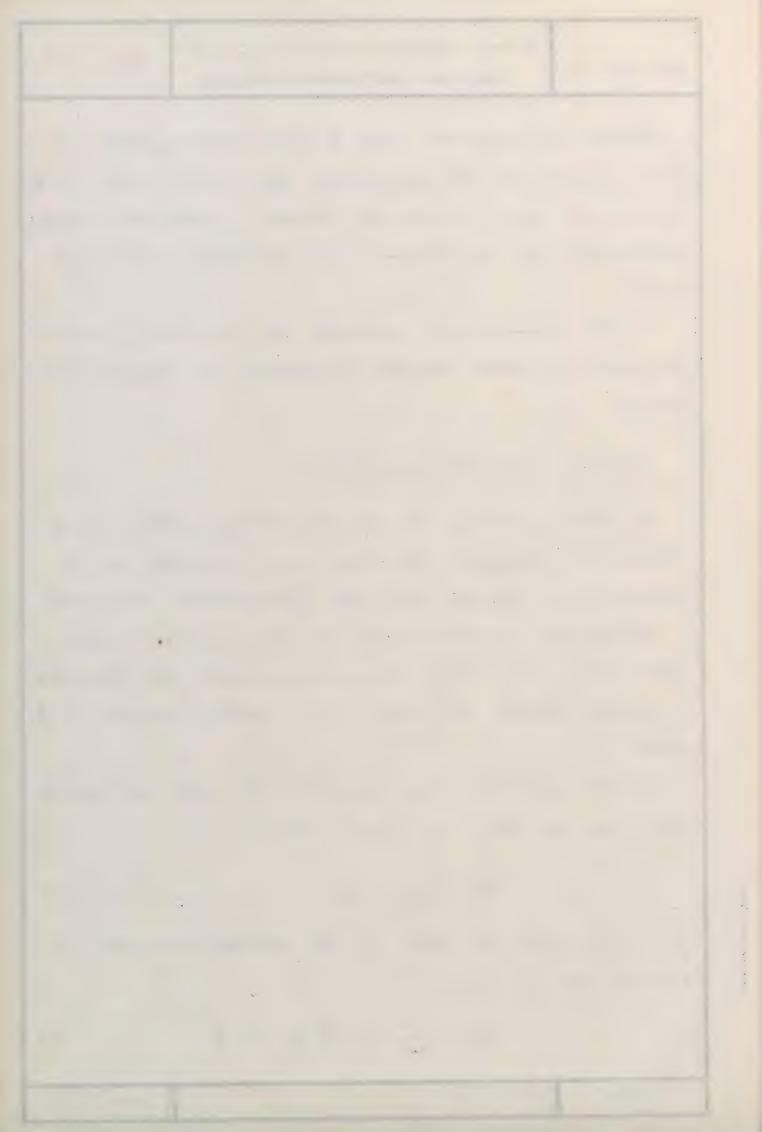
El radio bo de la esfera tangente a las aristas del escae dro dado, tiene por valor, en funcion de la

$$b_6 = \frac{\sqrt{2}}{2} l_6 = b_8'$$
 [1]

y por the parts, il indo l'y del retacche conjugación funcion de 69,

[2]





Conscido l'g en francion de la, se calcularan los aignientes s'alores (ver tabla figura 3):

l'8 = √2 l = 1. 41 42 13 56 24... × 55.0 = 77 78 17 46...

 $a'_{g} = 0.70 \ 71 \ 07 \times 77, 78 \ 17 \ 26 = 55.0 \ mm$ $b'_{g} = 0.50 \ 00 \ 00 \times 248 \times 346 = 38.9 \ 11$ $C'_{g} = 0.40 \ 82 \ 48 \times 346 = 31.8 \ 11$ $d'_{g} = 0.57 \ 73 \ 50 \times 346 = 44.9 \ 11$ $29 = 109^{\circ} \ 28^{\circ} \ 16^{\circ} \times 346 = 22.5 \ 11$ $k'_{g} = 0.28 \ 86 \ 75 \times 346 = 22.5 \ 11$

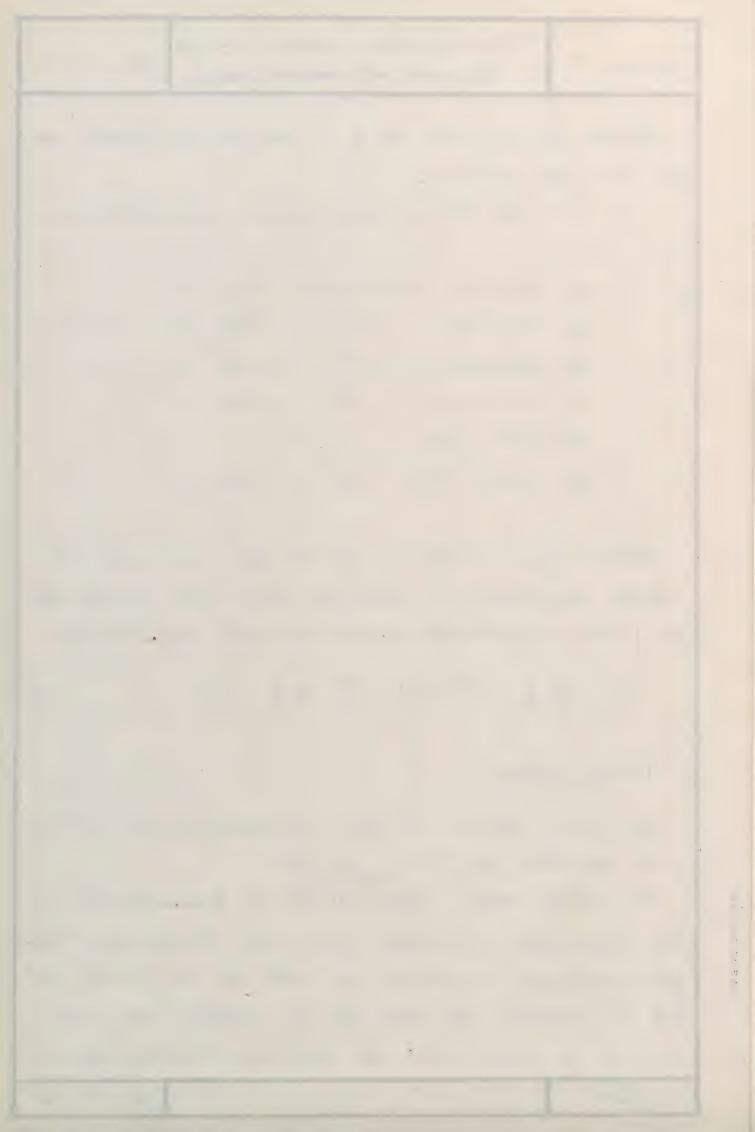
Observere que el cadio a' de la esfera coccumsorità al octardos conjugado, es iqual at lado la del exacto da-do, lo cual se de muestra terriendo en cuenta que . (ver [2]):

$$a_8' = \frac{\sqrt{2}}{2} \ell_8' = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 2b_8' = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2} \ell_6 = \ell_6$$
 [4]

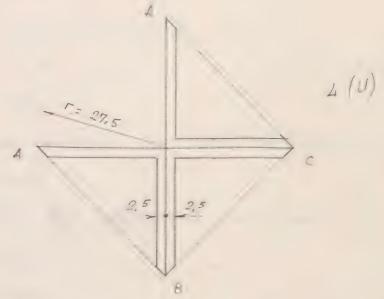
FIGURD CORPÓREA

guls equilaters de 77.8 mm de lato.

Lares (transparente y sim base), ougas caras la trada con 3 toimingues acctanques e isoscoles de catetro 27,5 min minerales de lado del exacedo); estas piramentes se acceleran asine cada uma de las ocho caras del competo, de la a que em



Tamilien burde solivanos el escado dado, entitogrado las cares transparentes de las la piramedes trianguesous, por las obtinidas seguin el trasado que se represente a contimuación:



gado, colecando suo reiticos A. B. C. en is punto medios de las aristas.



RESUMEN DEL CALCULO DE MAGNITUDES DE ESTE ESPECICIO

Nomenclatura empleada

l'g = bado del octaedro conjugado.

a's = Radio de la es/era circumscrita al mismo

bg = Radio de la esfera taugente a les aristas

C'₈ = Radio de la esfera inscrita

d's = Radio de la circumferencia circumscrita al poligono de una cara

24 = Angrelo rectilino del dido formado por de masso contiguas.

k's = Apotema del poligono de una cara.

S' = Luperficie.

V' = Volumen.

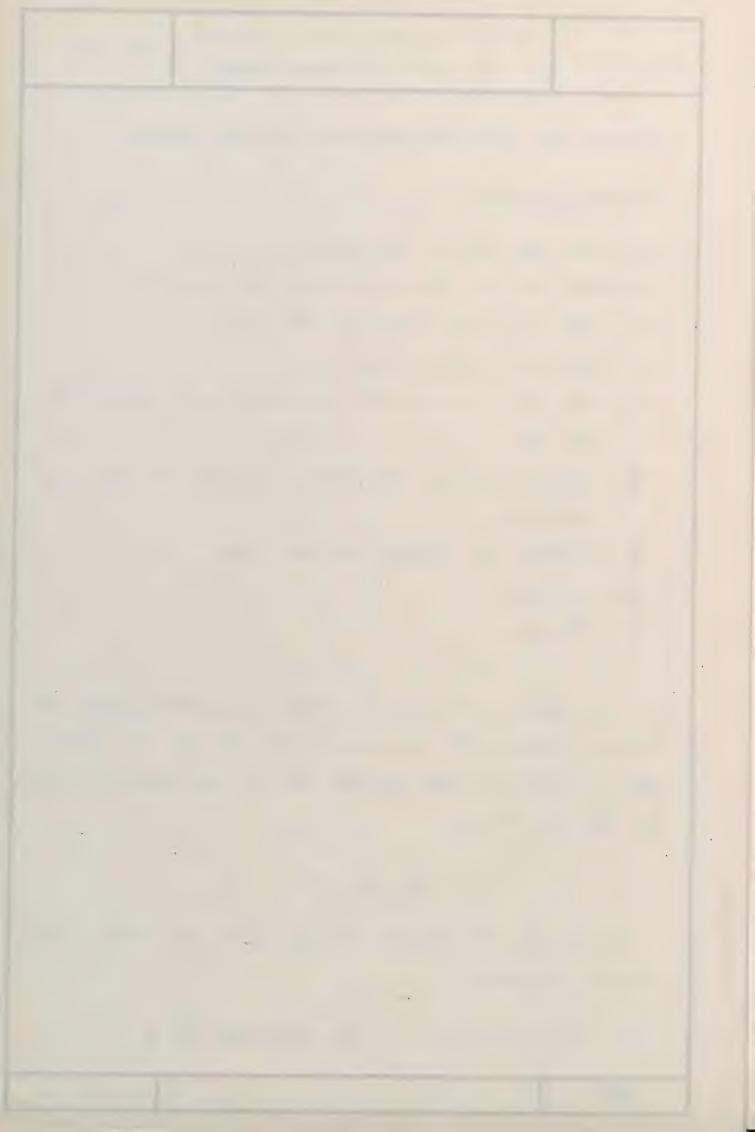
de valores autoriores del catardio conjugado, purden eltenerse descrimente en función del lado la del corardo dado, ya que el valor conserde de l'y en función de la (ver fórmula [2], es

(= V2 16

Furtiturends este valve en las firmulas 21 a 21 de la la-

$$a_8' = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2} \quad \ell_6 = \ell_6; \quad b_8' = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \quad \ell_6 = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \ell_6$$





$$c_{8}' = \frac{\sqrt{6}}{6} \times \sqrt{2} \quad \ell_{6} = \frac{\sqrt{12}}{6} \quad \ell_{6} = \frac{3\sqrt{3}}{6} \quad \ell_{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \ell_{6} : \quad d_{8}' = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \sqrt{3} \quad \ell_{6}' = \frac{\sqrt{6}}{3} \quad \ell_{6}' = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$k_{g}^{\prime} = \frac{\sqrt{3}}{6} \times \sqrt{2} \quad \ell_{G} = \frac{\sqrt{6}}{6} \quad \ell_{G}$$

$$S_{g}^{\prime} = 2\sqrt{2} \times \left(\sqrt{2} \quad \ell_{G}\right)^{2} = 4\sqrt{3} \quad \ell_{G}^{2}$$

$$V_8' = \frac{\sqrt{2}}{3} \times (\sqrt{2} \ell_c)^3 = \frac{4}{3} \ell_c^3$$

Lon villes las signientes ralaciones:

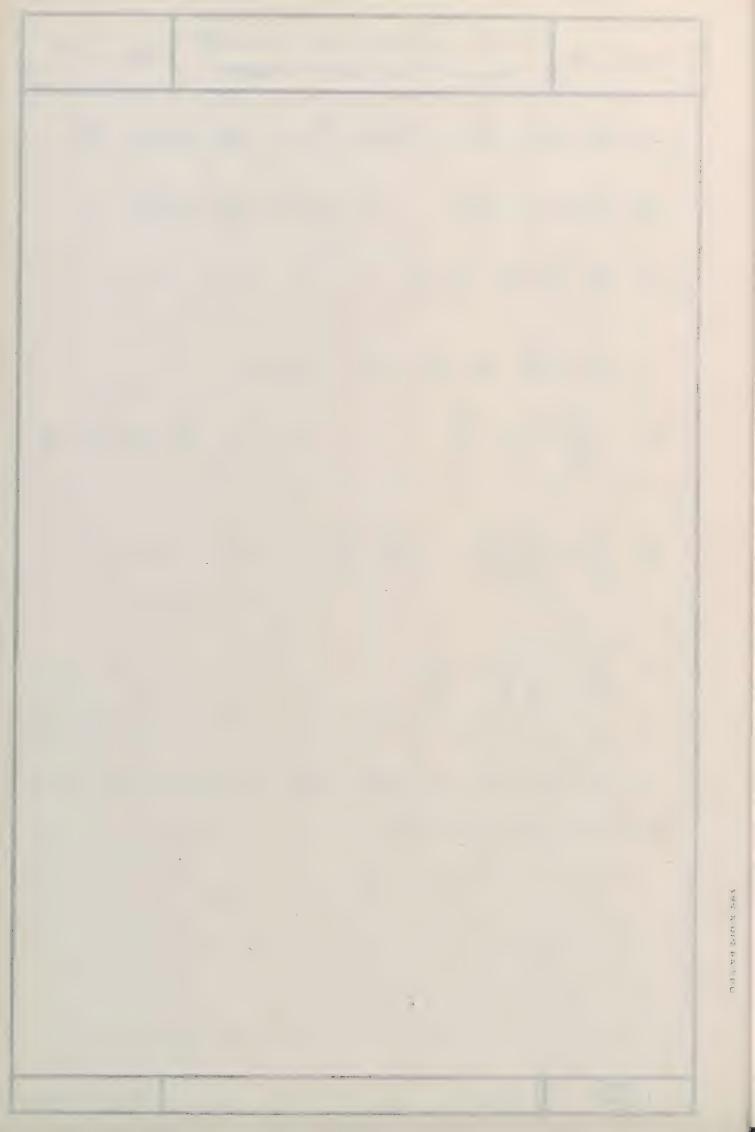
a)
$$\frac{\ell_6}{\ell_8'} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(mer firmula [2])

b)
$$\frac{S_c}{S_8'} = \frac{6 \ell^2}{4\sqrt{3} \ell_6^2} = \frac{6\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

c)
$$\frac{V_6}{V_8'} = \frac{\ell_6^3}{\frac{4}{3}\ell_6^3} = \frac{3}{4}$$

En el cuadro sinóptico dado a continuación, as. sumimos estos cesultados.



CUANCO SINOPTICO

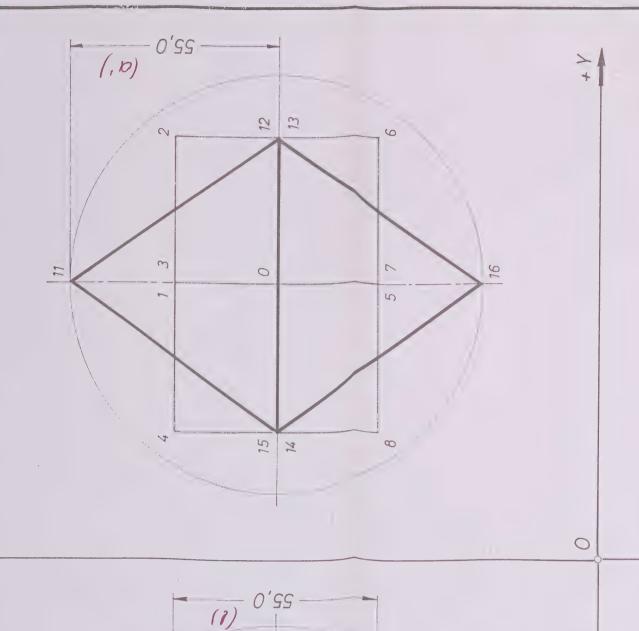
Maynitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado	
(136) 1'8	V2 6	1, 41 42 14 16	
(137) 0'8	1 l _E	1,00 00 00 16	
(132) b'g	V2/2 16	0, 70 71 07 6	
(139). C'8	V3 46	0, 57 73 50 16	
(140) d'8	$\frac{\sqrt{6}}{3}$ l_6	0, 81 64 97 6	
(141) 2 48	sen $\Psi = \frac{\sqrt{6}}{3}$	sen V = 0, 81 64 97 2 V = 109° 28' 16,6"	
(14e) k'8	<u>√6</u> &	0, 40 82 48 16	
(143) 5'8	4 V3 16	6,92 82 03 16	
(144) V2	$\frac{4}{3}$ l_6^3	1, 33 33 33 l ₆	
Relaciones entre magnitudes			
16:18	(145) <u>Vz</u> <u>2</u>	0,70 7/ 07	
S6: S8	(146) V3/2	0.86 60 25	
V6: 18	$(147) \frac{3}{4}$	0,75 00 00	

 $\frac{\overline{S}_{k}}{S_{k}} = \frac{\overline{V}_{k}}{V_{k}} = \frac{\sqrt{\frac{S_{k}}{S_{k}^{2}}}}{|V_{k}|^{2}}$

550



Z+



73

0

13

8

9

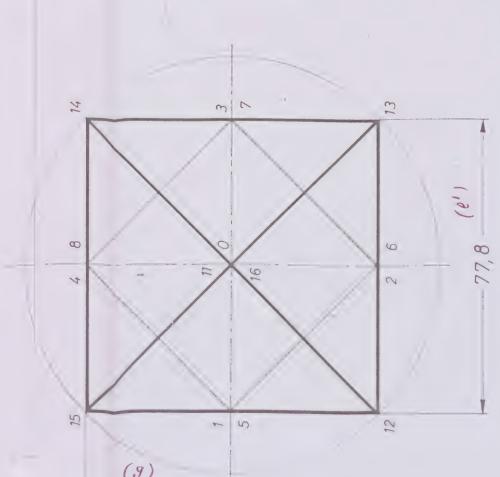
5

ENUNCIADO

aquél al trazar pòr los puntos medios octaedro conjugado de un exaedro rede las aristas del exaedro dado, rectas perpendiculares al plano determi-Representar por el método gráficoanalítico, en los planos I, II y III, el cuyas coordenado por cada una de sus aristas y gular de 55,0 mm de lado, obtenido nadas son 0 (72, 72, 85) mm. el centro 0 del mismo,

cotas funcomprobaque servirán de Calcular previamente sus gráfico. ción al trazado damentales

Dibujar en formato A3v y a esca-<u>...</u> ۵



NUMERACIÓN DE VÉRTICES

00 15 d 0 Octaedro conjugado... Exaedro dato

1+

(firma)			regulares convex	
Califi- cación			res	
Entregada			regula	
Propuesta De entrega Entregada		The second control of	Poliedros	
Propuesta		The Management of the Control of the	Polie	
	Fecha:	Alumno:	Escala 1:1	

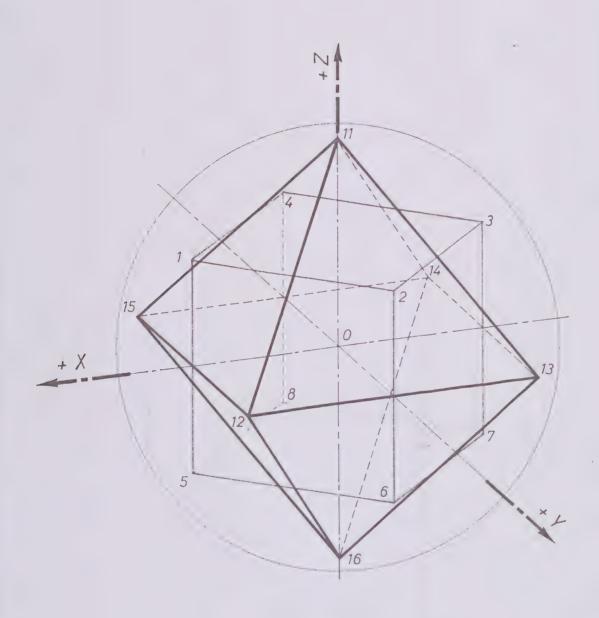
Escuela Curso

Lámina 13 - 19

Curso 19

xos conjugados





Poliedros regulares convexos conjugados



Lamina 14

ENUNCIADO

Representar por el cuébdo gráfico analítico, on los planos I, II y II, el exaecho conjugado de um octardo aquel el trasar por los puntos medios de las aristas del octare-dro dado, cuctas perpendiculares al plano de tomuna. do por cada uma de sus arietas y el centro O del mismo, cuyas coordenadas son: O (72, 72, 85) mm.

Servicai de comprobación al trasado gráfico. Dibujar en formato A3 V J. a escala 1:1.

 $\frac{DATOS}{l_g = 77.2} = 85) mm$

UNE A4 210 X 297



de regular.

El conjugado pedido con las condiciones del enunciado tiene sus aristas perpendiculares a las del estado dado, y ambas se cortan en sus puntos medios. Vor consigniente, la esfera tangente a las aristas de ambos priedres, es comein, y el punto de contacto de dicha esfera con las aristas es precisamente el punto de intersección de las miemas.

Por otra parte, si proyectamos los vértices del escaedro conjurgado sobre los respectivos caras del octaedro dado, dicha
proyección coincide con el cuetro de cada cara trianquelas
del octaedro.

Estas prepiedades ous permuten assolver facilmente la representación propuesta en el enunciado.

PROCESO GRÁFICO

Tracada dado en el "Proceso gráfico" de la lámina 3.

Seguidamente, completeros en el plane I la projección del exactio pededo, cuyo contorno es un cuadrado obtenido al unir los puntos meders del contorno del estactio dado.

Ottonida la projección sobre II del exacto pedido, se deduce facilmente las projecciones del mismo sobre I o III (ignales), así como el sado del exacto que se projecta



en un verdadera magnitud en I.

Por la cumeración adecuade de los virtices o centro de amos polisdros quedas completado la copresentación pedida.

PROCESO GRÁFICO - ANALÍTICO

El calculo analítico de las magnificaies a cotadas en la lamine. 14, se disarrolle Casandre en el ejeduado en la lamina 2, en función del lado l' del eraedro conjugado.

Prenamente se determinara el radio a' de la esfera circumscrita al mismo, terriendo en cuente la igualdad, en ambos potredies, del radio de la esfera tangente a las aristas.

El radio b, de la esfera tangente a las avistas del cetal. dro dado, tiene por valor, en función de la

$$b_8 = \frac{1}{2} l_8 = b_6'$$

of por otra parte, el lado l' del exactro cenjugado, en función de b, es

$$\ell_{6}' = \sqrt{2} \quad 5_{6}' = \sqrt{2} \times \frac{1}{2} \quad \ell_{8} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \ell_{8}$$
 [2]

Conocido l'e en función de la, se calcularan los seguientes valores (mer talla figura :):

$$\ell_6' = \frac{\sqrt{2}}{2} \ell_8 = 1.4142135624 \times \frac{.77.8}{2} = 55,0$$

siendo la relación la: la= 12

137



$$a_{6}' = 0.86 \ 60 \ 25 \times 55.0 = 47.6$$

$$b_{6}' = 0.70 \ 71 \ 67 \times " = 38.9$$

$$c_{6}' = 0.50 \ 60 \ 60 \times " = 27.5$$

$$d_{6}' = 0.70 \ 71 \ 67 \times " = 38.9$$

$$2 \ \varphi = 90^{\circ}$$

$$k_{=}' = 0.50 \ 00 \ 00 \times " = 27.5$$

d'adio a de la esfera circumscrita al octaedes dado, lo cual se demuestra te riendo en cuenta que (er [2]):

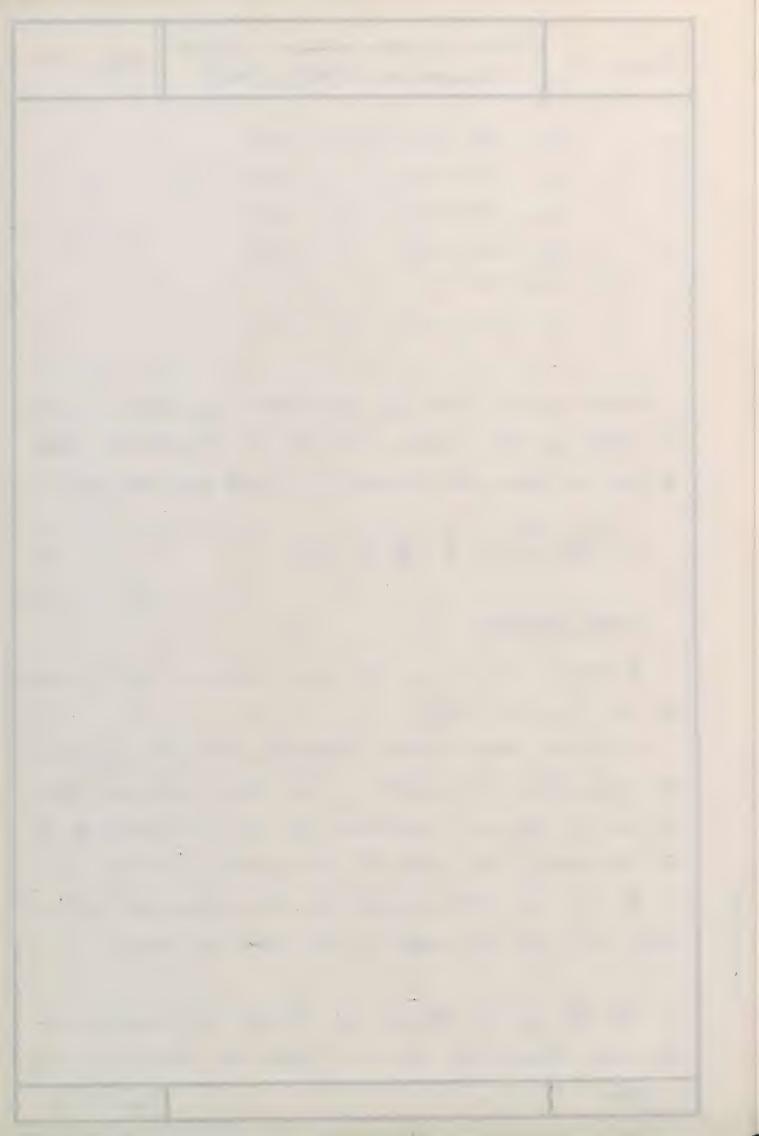
$$a_g = \frac{\sqrt{2}}{2} \ell_g = \frac{\sqrt{2}}{2} * \frac{2}{\sqrt{2}} \ell_6' = \ell_6'$$
 [4]

FIGURA CORPÓREA

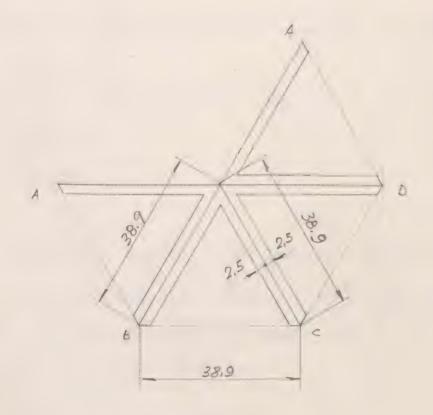
El exaedro conjugado se obtient por acoplaniento o cuadrado de 55 mm de lado.

des trianquelares (transparentes y sur base), cuyas creas éalerales son 4 trianquelos equilateros de 38,9 mm (anitad del lado del octuedos); estas piramidos se acoptarán sotes rada uma de las sers saras del compaçado. de forma que sees vistices esten en los puntos medios de las aristas de aquiel.

Caurtien punds obtenesse et octando dade, sustituyendo las caras transportates de las 2 piramides transportates, pa



las statis services de travado que en en a continua.



do, colocando sus vértices A. B. C. D. en los puros. medios de las aristas.

RESUMEN DEL CALCULO DE MAGNITUDES DE ESTE EJERCICIO

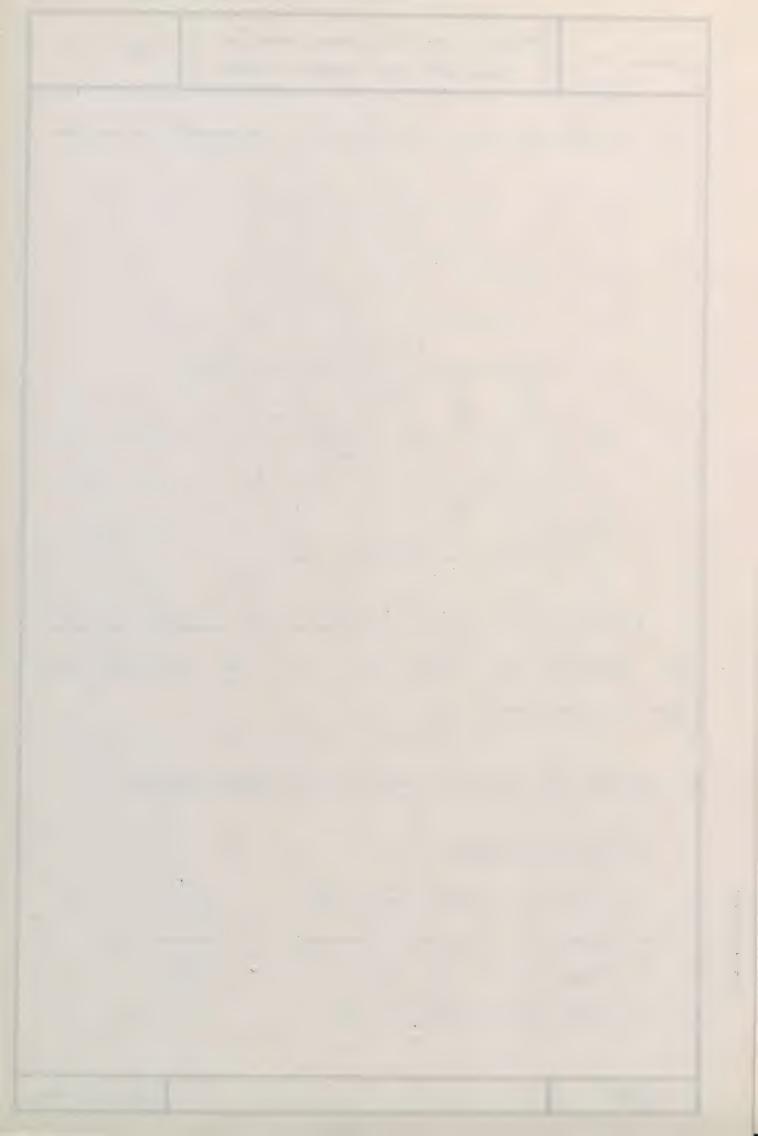
Nomenclatura empleada

l' = bado del exaedo conjugado.

a's = Rude de la espera circumscrita al mismo.

b' = Radis de la expentamente a las aristas.

C'_c = horte de la espera enscrita.



UNE A4 210 X 29

d's = Rodo de la circumferencia circumscrita al poligones de una cara.

21 = Angulo rectilines del diedos formado por dos caras con-

k's = Apotema del poligono de una cara

S' = Superficie

V' = Volumen.

de la lace finala [2]. es

Lustituyendo este valor en las fóramulas 11 a 19 de

$$a_{\epsilon}' = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} t_{\theta} = \frac{\sqrt{6}}{4} t_{\theta}; \qquad b_{\epsilon}' = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} t_{\theta} = \frac{1}{2} t_{\theta}$$

$$C_6' = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} l_0 = \frac{\sqrt{2}}{4} l_0;$$
 $d_6' = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} l_0 = \frac{1}{2} l_0$

$$k'_{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \ell_{8} = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \ell_{8}; \qquad h'_{6} = 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \ell_{8} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \ell_{8}$$

$$S_{c}' = 6 \times \left(\frac{12}{2} l_{g}\right)^{2} = \frac{6 \times 2}{4} l_{g}^{2} = 3 l_{g}^{2} \qquad V = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} l_{g}\right)^{3} = \frac{\sqrt{2}}{4} l_{g}^{3}$$



Low siteles has required adverses:

a)
$$\frac{1_8}{1_6'} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{21_6}{2} = \sqrt{2}$$

(our following [2])

b)
$$\frac{S_8}{S_6^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \frac{\ell_8^2}{\ell_8^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

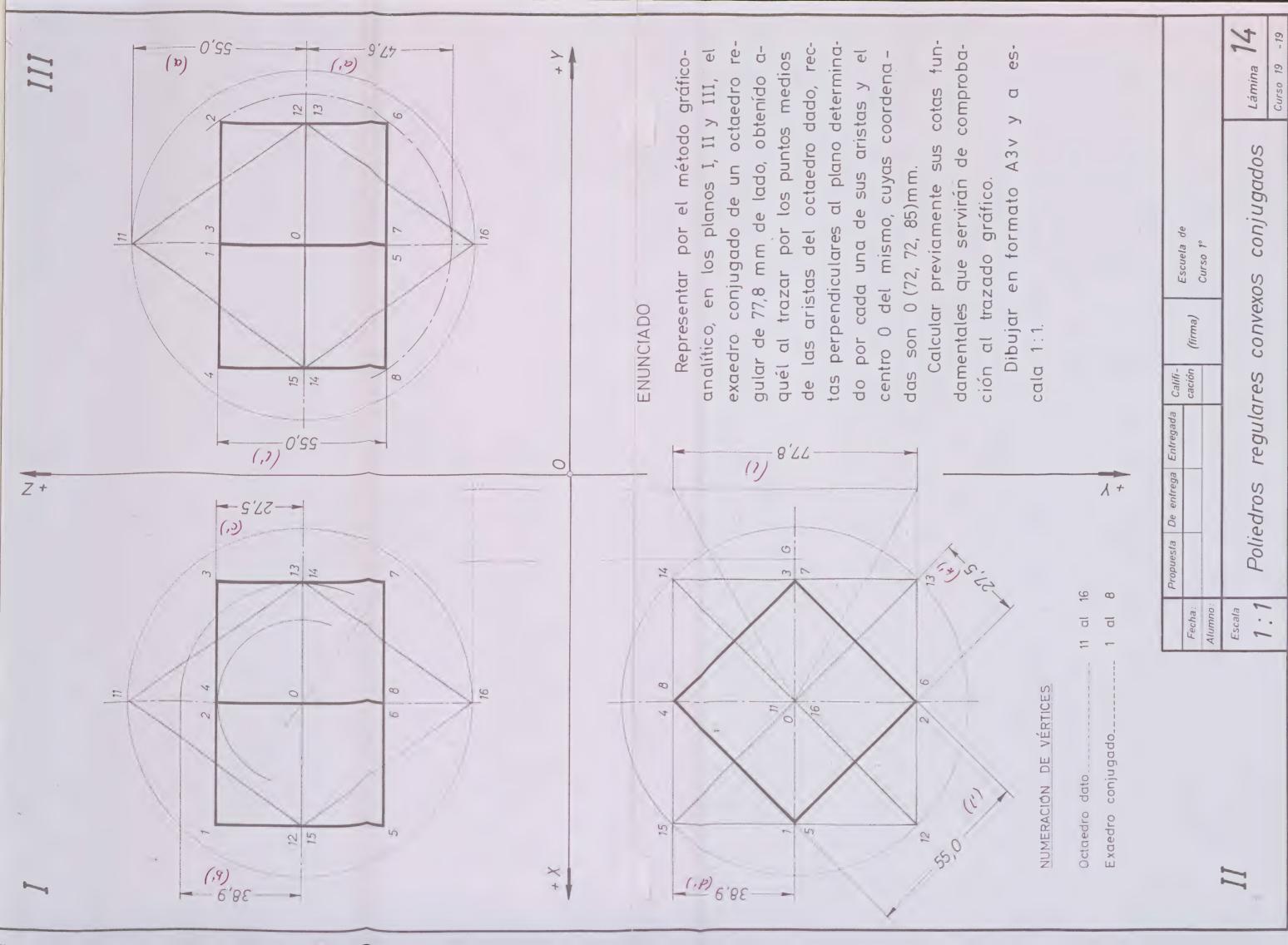
$$C) \frac{V_8}{V_6'} = \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{\ell_8^2}{4} = \frac{4}{3}$$

Resumen de cesultados en

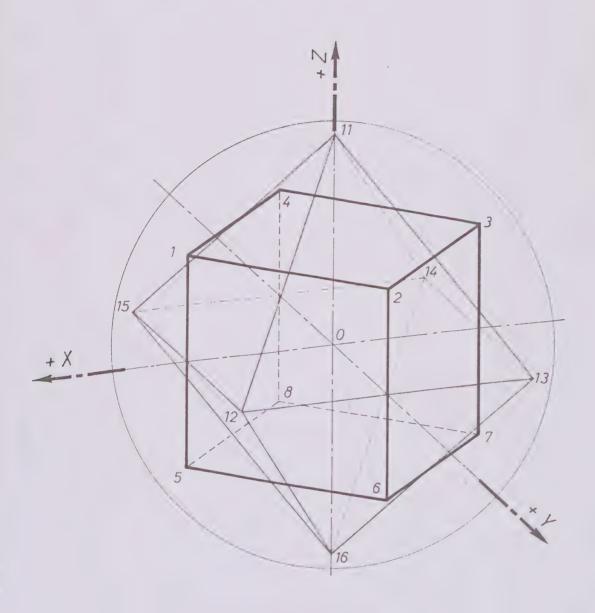
CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado	
16	(148) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ l_8	0,70 71 07	
06	(149) VE 4	0.61 23 72 18	
b' ₆	$(150) \frac{1}{2} l_8$	0,50 00 00 1	
c' ₆	(151) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ $\frac{1}{8}$	0, 35 35 53 le	
d'6	(152) 1/2 /8	0.50.0000 6	
246	(153) $gen = \frac{12}{2}$	sen 4 = 0.70 71 07 2 4 = 90°	
k's	(150) V2 /g	0, 35 35 53 18	
h'6	(155) <u>V2</u> 2	0.70 71 07 18	
S'e	(156) 3 12	3,00 00 00 4	
VE	(157) <u>YZ</u> 13	0, 35 35 53 18	
Relaciones entre magnitudes			
18:16	(15%) \(\frac{7}{2}\)	1, 41 42 14	
Sp : 56	(159) 2 V3 3	1, 15 47 01	
V2 : V6	(100) 4 3	1, 33 33 33	









Poliedros regulares convexos conjugados



15

Lonina 15

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II, II, el poliedro obtenido por la intersección de los dos poliedros compagados representados en las laminas 13. y 14.

Dibujar en formato 43 v 2 a escala 1:1



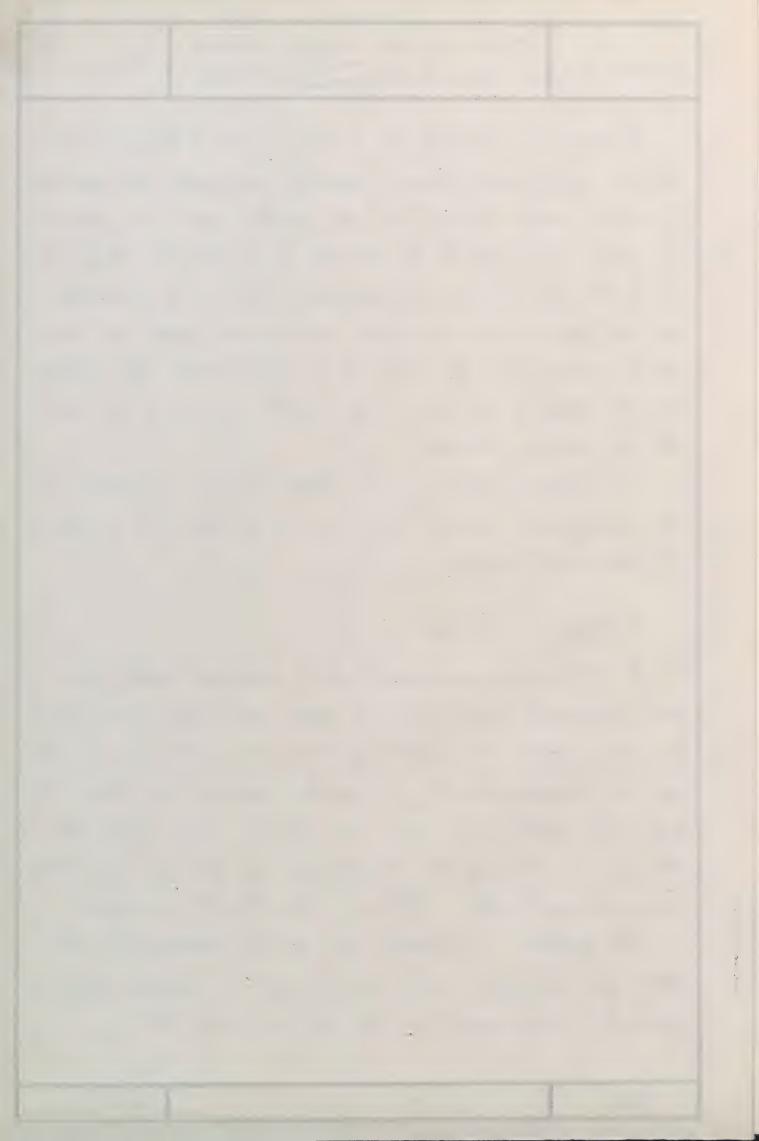
exacts regular on un octaco en la lamina 15, interseccion de un ocaco regular compagnos del anterior y con la estera tangente a las aristas comuna a ambos, se officia completando el trasado de la lamina 13 (o el de la lamina 14), con los triangules equilativos y cuadrados que se torman al ser cortado cada angulo solido de umo de la principale, por las caras de su confuçado. Los vistices de estos poligones estarán en se punto medios de las serios de estos poligones estarán en se punto medios de las serios de estos poligones estarán en se punto medios de las serios de acubos policidos.

El "Proceso enofico" y el "Proceso práfico-analítico" de la mencionada lámina 13 (o el de la 14), sirre ignalmente para este ejercicio.

FIGURA CORPOREA

Le obtique per acoplanients de 8 pramides cetas ain base , compuesta cada una de ellas per 3 triangula rectarante isoccales de catetos de 37.5 mm e hepetenesa de 38.9 mm correspondentes al exacdes regular, con chas 6 piramedes rectas (sin base), compuesta cada una de ellas per de torangulos equilateris de 2.9 mm de late, correspondentes estas viltamas al estacdo regular.

Este poliedro es concavo, ya que la pedençación del plano de cualques cara de suns de los poliedros, deja en distintos semiespacios a los vértices del otro.



CALCULO DE MAENITURES DE ESTE FOLIEROS

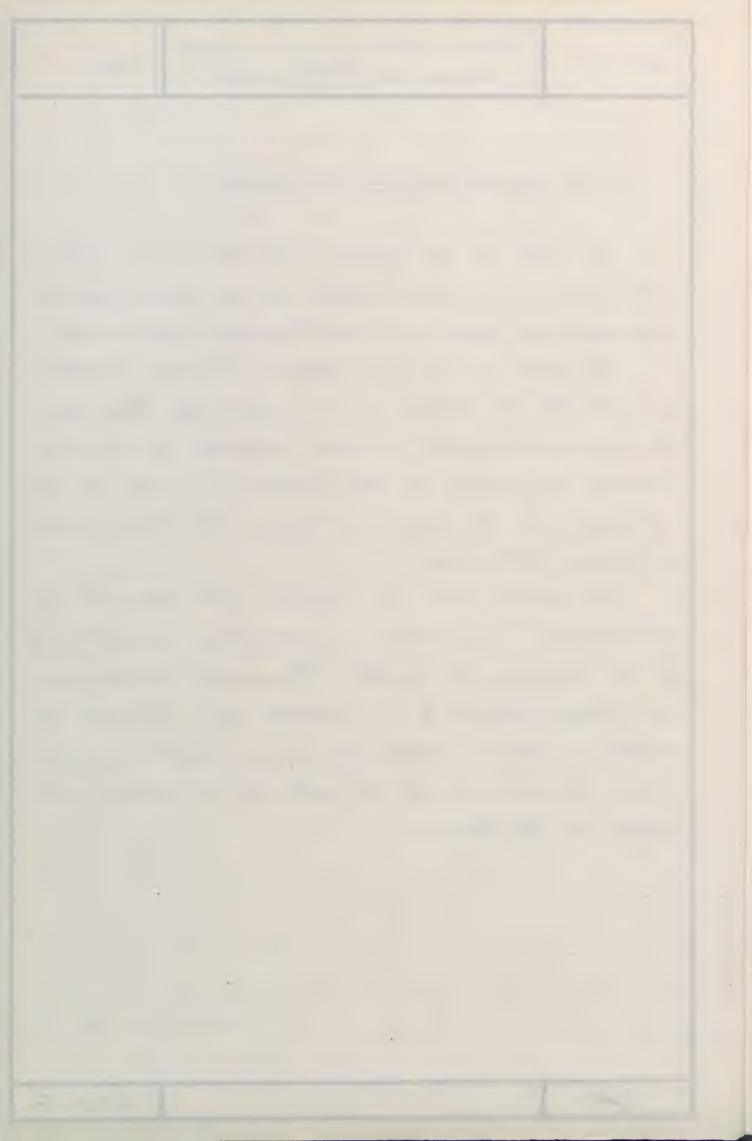
El múcleo de este políedes es el solido comeim en la intersección de un exaedes regular con su octaedes regular conjugado con respecto a los puntos medios de sus aristas.

Este sólido común es un poliedro no regular, convexo, compuesto de 6 cuadrados q 8 trianquelos equilateros, de lados de ignal longitud en ambet preguest. Ins a quis poliedros (12 en total) son todos ignales q en cada uno de ellos concurren dos caras cuadradas q dos trianquelas en forma alternada.

Este policido entra en el grupo de los llamados "hominio diane", cuy estudio y representación desarrollament en las laminas 33 a 48. Corresponde al designado por "Sequimediano II" (láminio 35), donde re detalla el cálculo analítico de ens prencipales magnitudes, algunas de ellas de aplicación al priedro estudiado en esta lámina.

(continuia ... !.





CALCULO DE MAGNITUDES DE ESTE POLIEDRO

A = Anania rectaines del dicos sonos sonos caras ecantes
 contiguas

El diedro de formado por una casa del exaedro, con la casa seconte del octardos conjugados en suplementarso del servididados 24 del estardos cuquelas; su stator será pues

$$\alpha = 120^{\circ} - \frac{109^{\circ} 28' 26.6''}{2} = 125^{\circ} 15' 51.7''$$

S = Ana lateral en funcion de la

jas caras laterales som he timanquelos equitateros de lado ienal a $\frac{l_8}{2}$, γ : 2) - De 8 minimides l_3 , cuyas caras laterales son 3 trianquelos isorceles, rectainquelos, de hipoteriores sa ignal a $\frac{l_8}{2}$. Va consigniente, la superficie l_3 del poliedro, será:

$$S = 6 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{\ell_2}{2}\right)^2 + 8 \times 3 \times \frac{\frac{l_8}{2} \times \frac{l_8}{4}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} l_8^2 + \frac{3}{2} l_8^2 =$$

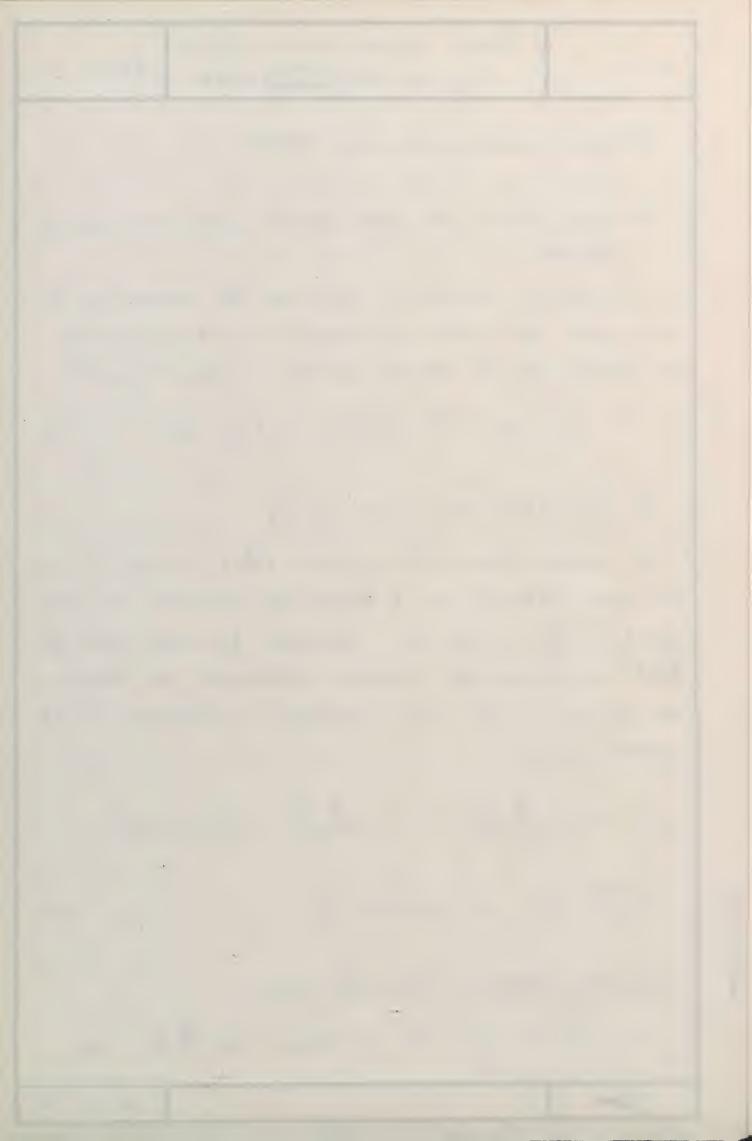
$$= \frac{3+3\sqrt{3}}{2} l_8^2 = 4,098076...l_8^2$$
 [2]

S = Irea tateral en función de 16

De la relación $\frac{l_8}{l_6} = \sqrt{2}$ se deduce $l_8 = \sqrt{2} l_6$, que - sám. 14. firmula 158

C

31-3-50



They a 4

sustitude en [2]. mo da:

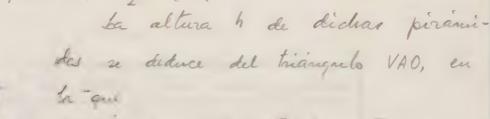
$$S = \frac{3 + 3 \sqrt{3}}{2} \left(l_8^2 \right) = \frac{3 + 3 \sqrt{3}}{2} \left(\sqrt{2} l_6 \right)^2 = \left(3 + 3 \sqrt{3} \right) l_6^2 = [3]$$

$$= 8, 19 61 52 ... l_6^2$$

V = Volumien en fanción de la

El volumen se puede calcular como suma de volumences de uno de los poliedros regulares y de las pirármides complementarias formadas en sus caras por la intersección del otro.

Comiderando como primer sumando el volumen del octaedro, habra de inverementarse a este el volumen de 8 piranides de bese triungulas (conilites) y caras laterales formadas por triangulas rectairques isosceles de hipoternesa igual a 18 (fig. 1).



$$\overrightarrow{VA} = \frac{1}{4} \ell_g$$
 $\overrightarrow{AO} = \frac{\sqrt{3}}{6} \times \frac{1_g}{2} = \frac{\sqrt{3}}{12} \ell_g$

$$9 \quad \overline{VO} = \sqrt{\overline{VA} - \overline{AO}^2} = \sqrt{\frac{1}{16} \left(\frac{2}{5} - \frac{3}{12^2} \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \sqrt{\frac{12^2 - 16 \times 2}{12^3 \times 16}} \right)} = \frac{\sqrt{6}}{12} \ell_8$$

de dente

Œ.

21-2-72



$$V = \frac{\sqrt{2}}{3} \int_{8}^{3} + 8 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{l_{g}}{2}\right)^{2} \times \frac{\sqrt{6}}{12 \times 3} \int_{8}^{2} = \frac{3\sqrt{2}}{8} l_{g}^{2} =$$

[4]

il desarrollo de este calculo es el signiente:

$$V = \frac{\sqrt{2}}{3} l_y^3 + 8 \times \left[\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{l_g}{2} \right)^2 \times \frac{\sqrt{6}}{12 \times 3} l_g \right] = \left(\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{8 \sqrt{3} \sqrt{6}}{2^4 \times 12 \times 3} \right) l_g^3 = \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{8 \sqrt{3} \sqrt{6}}{2^4 \times 12 \times 3} l_g^3 = \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{8 \sqrt{3} \sqrt{6}}{2^4 \times 12 \times 3} l_g^3 = \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{8 \sqrt{3} \sqrt{6}}{2^4 \times 12 \times 3} l_g^3 = \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{8 \sqrt{3} \sqrt{6}}{2^4 \times 12 \times 3} l_g^3 = \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{8 \sqrt{3} \sqrt{6}}{2^4 \times 12 \times 3} l_g^3 = \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{8 \sqrt{3} \sqrt{6}}{2^4 \times 12 \times 3} l_g^3 = \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{8 \sqrt{3} \sqrt{6}}{2^4 \times 12 \times 3} l_g^3 = \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{2$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{2^3 \sqrt{18}}{2^4 \times 2^2 \times 3^2}\right) \ell_g^3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{2^3 \times 3 \sqrt{2}}{2^6 \times 3^2}\right) \ell_g^3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2^4}\right) \ell_g^3 =$$

$$= \frac{8\sqrt{2} + \sqrt{2}}{24} \ell_8^3 = \frac{3\sqrt{2}}{8} \ell_8^3$$

Liends by = 12 bs (ver apartado d), sustituyendo este va-

$$V = \frac{3\sqrt{2}}{8} \cdot \left(\sqrt{2} \frac{1}{6}\right)^3 = \frac{3\sqrt{2}}{8} \times 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{6}^3 = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{6}^2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{6}^2$$

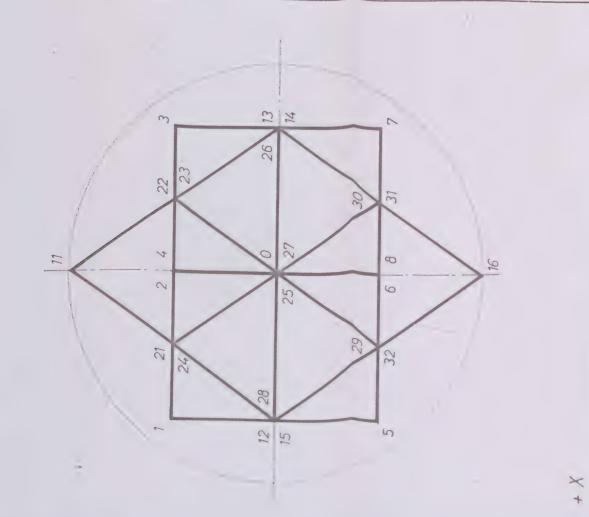
Resumer de resultado:

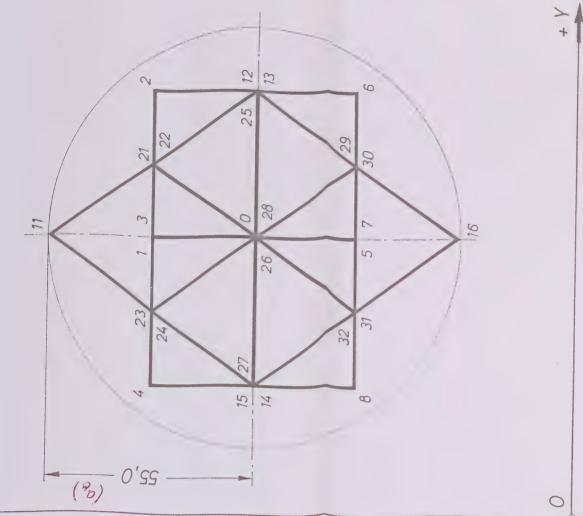
CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal assoximado	
(iet)	$\frac{\pi}{2}$ - 2 arc. sen. $\frac{\sqrt{6}}{3}$	125° 15' 51,7"	
(162)	3+315 12	4, 09 80 76 12	
	3+3 /3 /6	8, 19 61 52 . 1 2	
(163)	$\frac{3\sqrt{2}}{8}$ l_{g}^{3}	0, 53 03 31 (2	
V	$\frac{3}{2}$ $\binom{3}{6}$	1. 50 00 00 18	



Z +





14 12

NUMERACIÓN DE VÉRTICES

00	16	32
ā	al 16	0
-	=	21
	1 1 1	111) 21
	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	(arquimediano
Exaedro	Octaedro	Núcleo

1 +

0	
V	
\overline{C}	
Z	
\supset	
Z	
Ш	

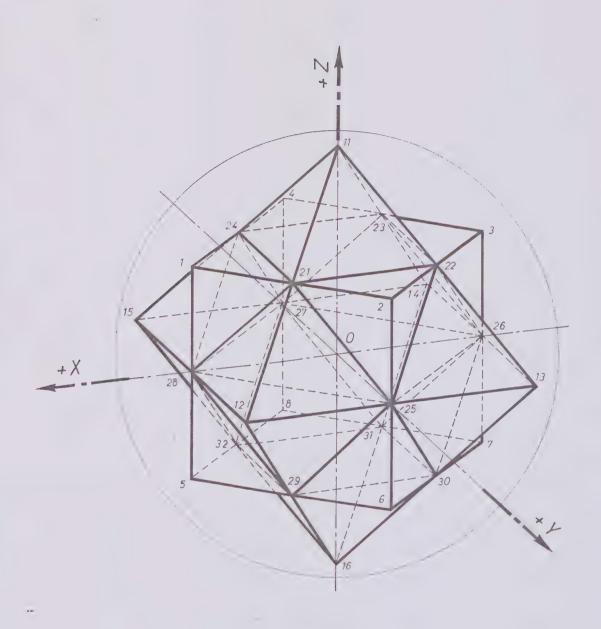
ción de los dos poliedros conjugados co-analítico, en los planos I, II y III, Representar por el método gráfipor la intersecrepresentados en las láminas 13 y 14. poliedro obtenido <u>-</u>

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

		1	
Entregada			
Propuesta De entrega Entregada			
Propuesta		Amount of the state of the stat	
	Fecha:	Alumno:	Escala

(firma) Escuela				Poliedros regulares convexos conjugados
Califi-				res c
Propuesta De entrega Entregada Califi-				regula
De entrega				Solpe
Propuesta				Polie
	Fecha:	Alumno:	Escala	1:1







Lanina 16

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico- analítico, en los planos I, II q III, el icosaedro compugado de um do-decaedro regular de 35.7 mm de lado, obternido aquel al trasar por los puntos medios de las aristas del dodecae-dro dado, rectas per pendiculares al plano de termina-do por cada uma de sus aristas y el centro O del onismo, cuyas coordenadas son: O (72, 72, 85) mm.

Calcular previamente sus cotas fundamentales que

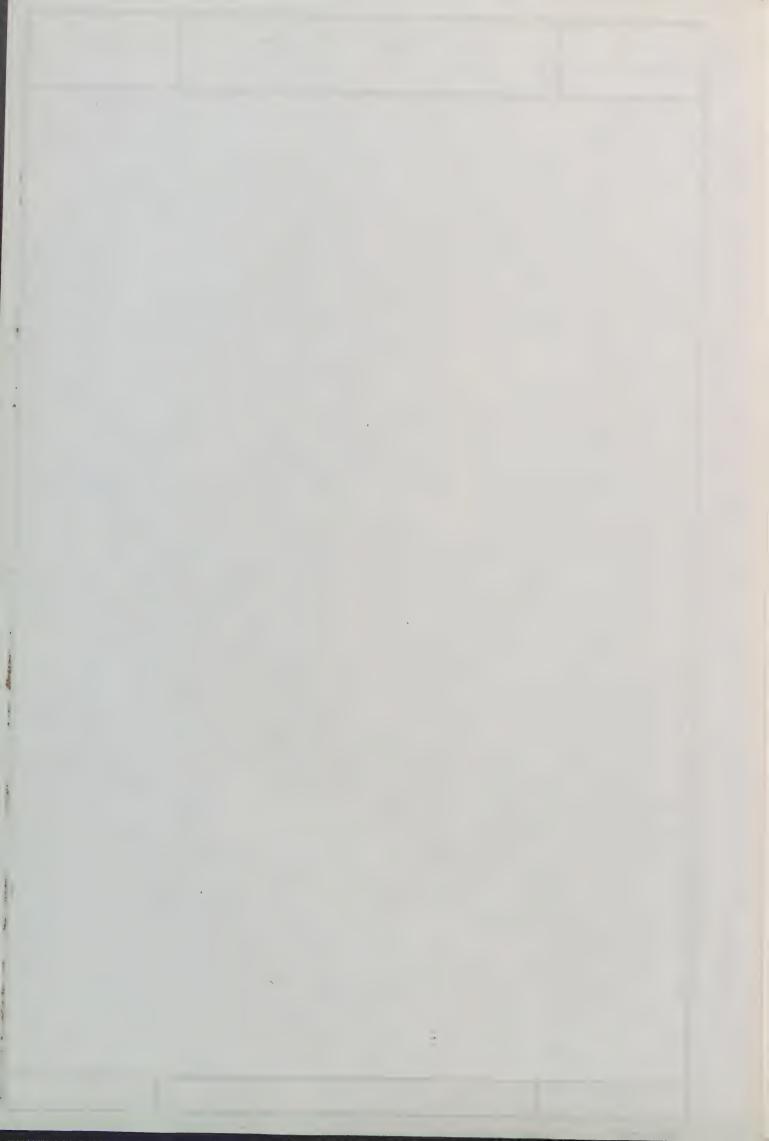
Palcular previamente sus cotas fundamentales que serviran de comprobación al trasado gráfico. Dibujar en forma to A3V g a escala 1:1.

 $\frac{DA70S}{l_{D}} = 35.7 \quad m = 0$

UNE A4 210 X 297

-ED.

94-9-73



El poliedro conjugado de un dodecardro regular, es un icosardro regular.

sus aristas proporadiculares a las del dodecación, y ambre se contan en sus punto medios. For consigniente, la espera tangente a las aristas de ambres polícidos, es comein, y el punto de contacto de decla esfera con las aristas es precisamente el punto de intersección de las mismas.

Por tha parte, si progestames entequalmente les vértices del icosaedro conjugado estre las respectivas caras del dedecaedro dado, dicha proyección coincide con el centro de cara da cara pentagonal del dodecaedro.

ce presentación propuesta en el enunciada.

PROCESO GRÁFICO

Procedament previamente a la representación del doderas.

dro dado cuyo lado, conserdo, es de 35,7 mm. Vara ello

utilizarenes el tracado etado en el "Froceso gráfico" de la

lámina is, de enmenado previamente el valor del actie C de la

esfera inscrita (ver Proceso gráfico-analítico) enyo salor rerá:

c = 1,1135 × 35,7 = 39.8 mm

Sequidamente, completaremes en el plano I la proyección del ricosaecho pedido, enyo contorno, seguin demostraremos sequidamente, es coincidente con el del dodecaecho dado, pr



lo cual la proyección sobre II de dicho iersaedro, en incomdiale. Utimise que as tremes de dibens la projección II,

todas las aristas del dodecaedro dado, cortan a las del
compresso en su suresto missos e com es populara
en el espacio, se conserva en sus projecciones.

Dicha propiedad servira pues de base para obtener la propección del icosaedro pedido en el plano I.

La proyección del mismo sobre III, se deduce de la I

Con la rumeración adecuada de lo vértices o centro de

PROCESO GRÁFICO - ANALÍTICO

El cálculo analítico de las magnitudes acotadas en la lácomina 16 se desarrolla basándose en el efectuado en la lácomina 5, en función del lado l'20 del icosaedro conjugados.

Previamente se determinará el radio a de la esfera úncum crita al comismo, teniendo en cuenta la igualdad en
ambio policidos, del radio de la esfera tanquete a las axis.

El radio be de la esfera tanquete o su susta del dececaedro dado, tiene por valor, en función de l₁₂

$$b_{12} = \frac{3+\sqrt{5}}{4} \lambda_{12} = b_{20}$$

que etra perte, el lade s' del remande compagado en función de b'o, es



$$\ell'_{20} = \frac{4}{1 + \sqrt{5}} \quad b'_{20} = \frac{4}{1 + \sqrt{5}} \quad \star \frac{3 + \sqrt{5}}{4} \quad \ell_{12} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \ell_{12}$$

[2]

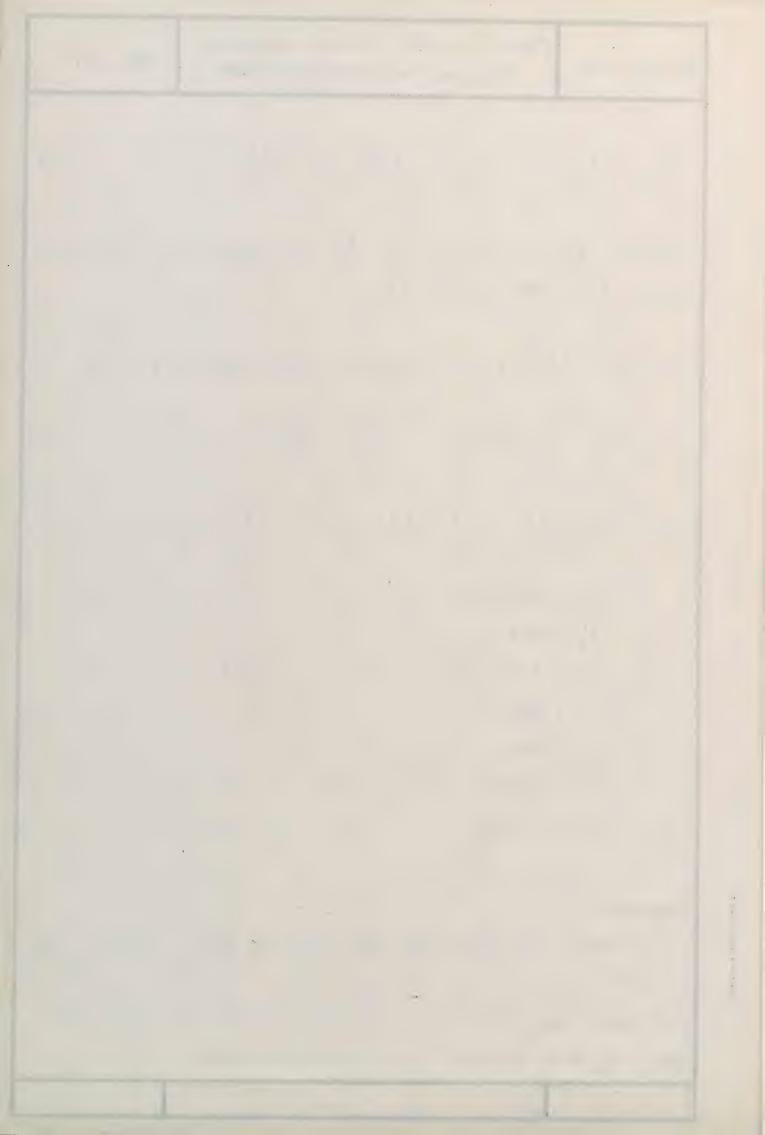
valores (ver tolla fignera 5):

siendo la relación
$$\frac{l_{20}}{l_{12}} = \frac{15+1}{2} = 1.61.80.34$$
 [3]

$$f'_{20} = e'_{20} = 0.85 \ 06 \ 51 \times ... = 49.2 ...$$

$$k_{20}^{\prime} = 0.28 86 75 \times id = 16.7$$

* El valor mai aproximado del lado l_{12} dado, se obtiene del exacto . $a_{20} = 55$ mm; de donde $l_{20} = 55:0.95:10:57=57,83:03:93$ 7 de aquí: $b_{20} = 57,83:03:93 \times 0.80:90:17 = 46,78:57:69$, por lo que ma $l_{20} = 40.78:57:09:11:12=15,75:11:47$



$$e'_{20} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$$
 $e'_{12} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$ e'_{12}

$$g$$
 seguin [3] $\frac{l_{20}}{l_{12}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, se visition i que

$$e'_{20} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} l'_{20} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times \frac{\sqrt{5}+1}{2} l_{12} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} l_{12}$$

El desarrollo del calculo anterior es el signiente;

$$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times \frac{\sqrt{5+1}}{2} l_{12} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times \frac{(\sqrt{5+1})^2}{4} l_{12} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times \frac{5+1+2\sqrt{5}}{4} l_{12} =$$

$$=\sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(6+2\sqrt{5})}{40}} l_{12} = \sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{20}} l_{12} = \sqrt{\frac{15+3\sqrt{5}+5\sqrt{5}+5}{20}} l_{12} =$$

$$=\sqrt{\frac{20+8\sqrt{5}}{20}}\,\ell_{12}=\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\,\ell_{12}$$

lo cual nos demuestra que: El radio de la cir aun joren cia circunscrita a ricagones recular, contorni en I del icosaedro conjugado, es igual al del dodecaedo dedo en la misma proyección.

De agui se deduce que les lades de ambos decagones son también ignales, par lo que serà:

20-1-22

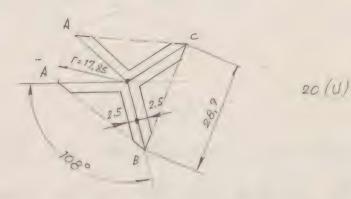


FIGURA CORPOREA

El icosaedro conjugado se obtiene por el acoplamiento de 20 triangulos equilateros de 57.8. mm de lado.

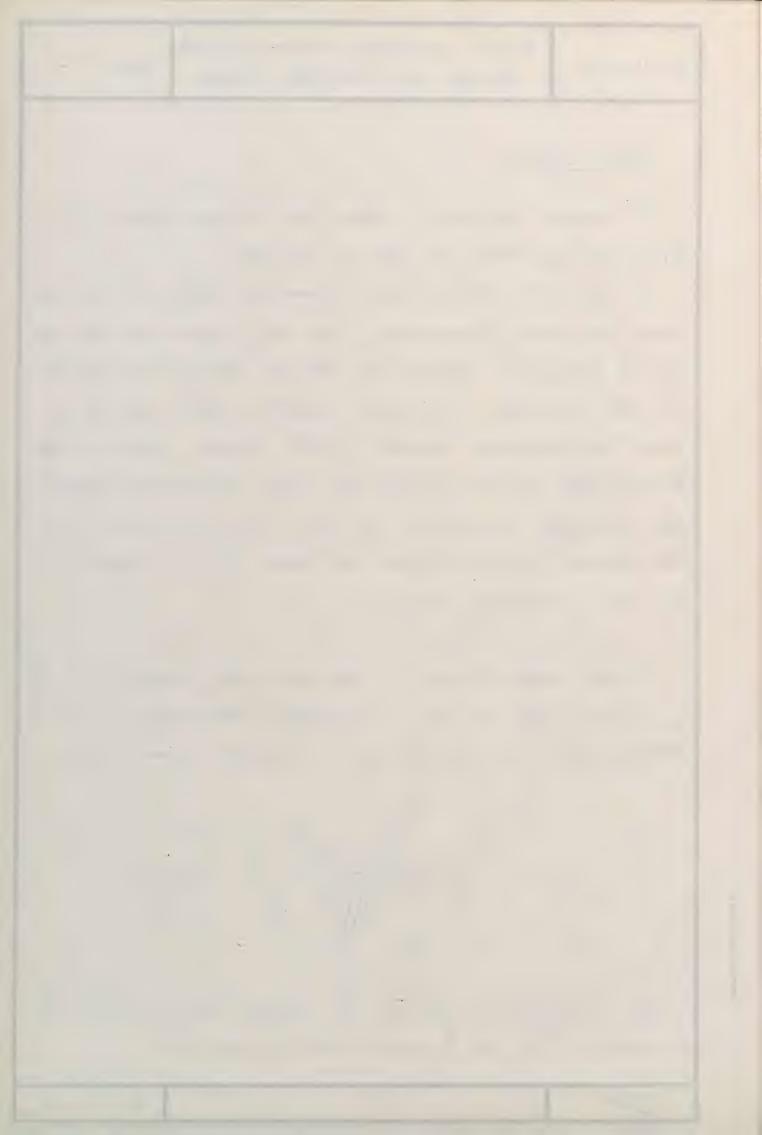
de dode cardro dado se obtiene formando previamente 30 pinámidis hianqueles (transporentes que sase), curas caras laterales
son 3 triánquelos isosceles un base de 28,9 mm (mitad del
tado del icosacaso y el angulo operato a destre base es el
inscrito del pentagono regular (1080); los lados ignales de sase
triángos aran de 17. 85 (mitad del tado del deaccardes dado).
Estas pirámides se acoplaran sobre cada una de las veinte caras
del conjugado, de forma que sus vértices esten en los pentos medios de las aristos de aquel.

tanas hans, muse de las se manidas triangulasts, in la detemdes según el trasado que se representa a continuación.



estas 30 piramentes ne acapearaire al revolucios conjugado, estarando sus virtires A. B. C., en los pentos medios de las aristas.

9



RESUMEN DEL CALCULO DE MAGNITUDES DE ESTE EJERCICIO

Nomenclatura empleada:

1'20 - Lado del icosaedio conjugado.

a'zo = Radio de la esfera circumscrita al misuro.

b'20 = Pardis de la esfera tangente a las anistas.

C', = Radio de la esfera inscrita.

d'e Radio de la circumferencia circumscrite al poligono de una cara

2 % - Lugulo accienne del diedo formado por de caras antiqual.

e'zo = Radio de la circumferencia circumscrita a un pentagono regular de lado l'zo, y también al decágono aequelas de
lado l'zo automo de la sista I.

f'= Altura intermedia del contornio de las vistas I g II.

gro = Alturas extremas del contor ao de les vistas I g II.

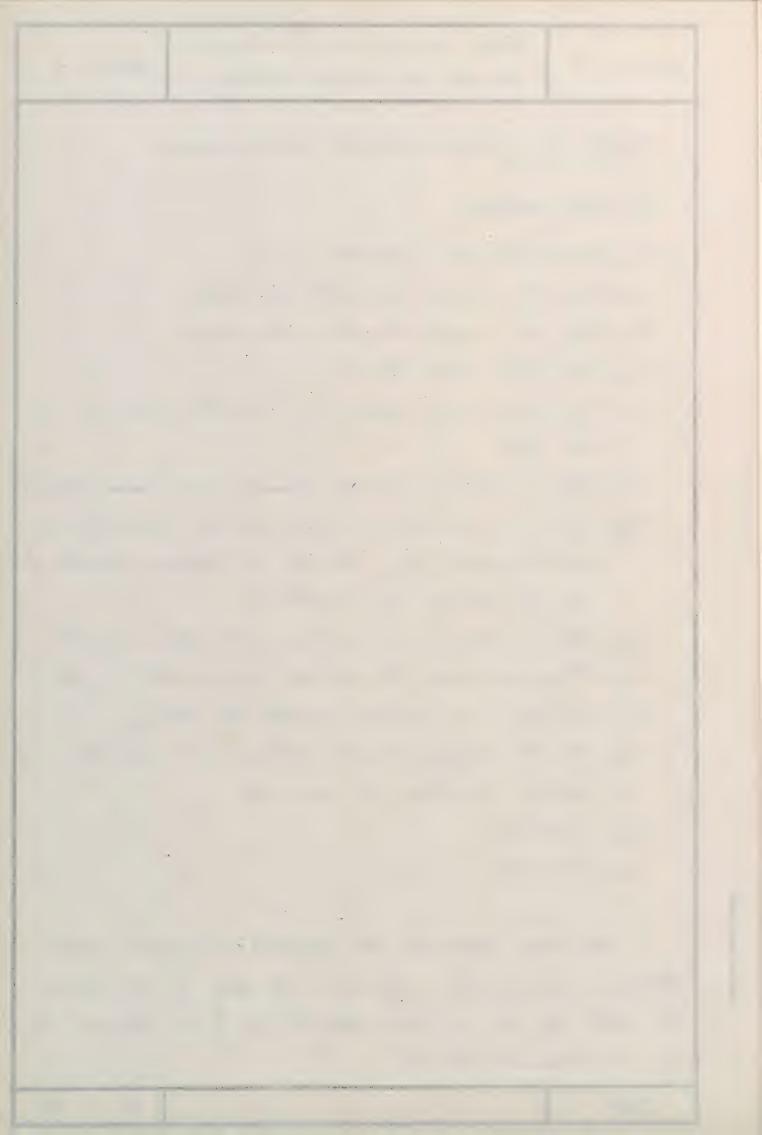
h'zo = Apotema de un pentagono regular de lado l'20.

i's bado del decagono regular, contorno de la mita II.

k's = Spotema del poligono de una cara.

S'20 = Luperficie.

V'20 = Volumen.



Justitugenes este valor en las féronneles 13 a 55 de la la-

$$a_{20}' = \frac{\sqrt{10 + 3\sqrt{5}}}{4} \times \frac{1 + \sqrt{5}}{2} l_{12} = \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{2} l_{12}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $a_{20} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} \times \frac{1+\sqrt{5}}{2} l_{12} =$

 $= \frac{\sqrt{(10+2\sqrt{5})(1+\sqrt{5})^2}}{8} l_{12} = \frac{\sqrt{(10+2\sqrt{5})(1+5+2\sqrt{5})}}{8} l_{12} = \frac{\sqrt{(10+2\sqrt{5})(6+2\sqrt{5})}}{8} l_{12}$

 $= \frac{\sqrt{2 \times (10 + 2 \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})}}{8} l_{12} = \frac{\sqrt{2 \times (30 + 6 \sqrt{5} + 10 \sqrt{5} + 10)}}{8} l_{12} =$

 $= \frac{\sqrt{2 \times (4c + 16 \text{ UF})}}{8} l_{12} = \frac{\sqrt{2 \times 8 \times (5 + 2 \text{ UF})}}{8} l_{12} = \frac{4 \sqrt{5 + 2 \text{ UF}}}{8} l_{12} = \frac{4 \sqrt{5 + 2 \text{U$

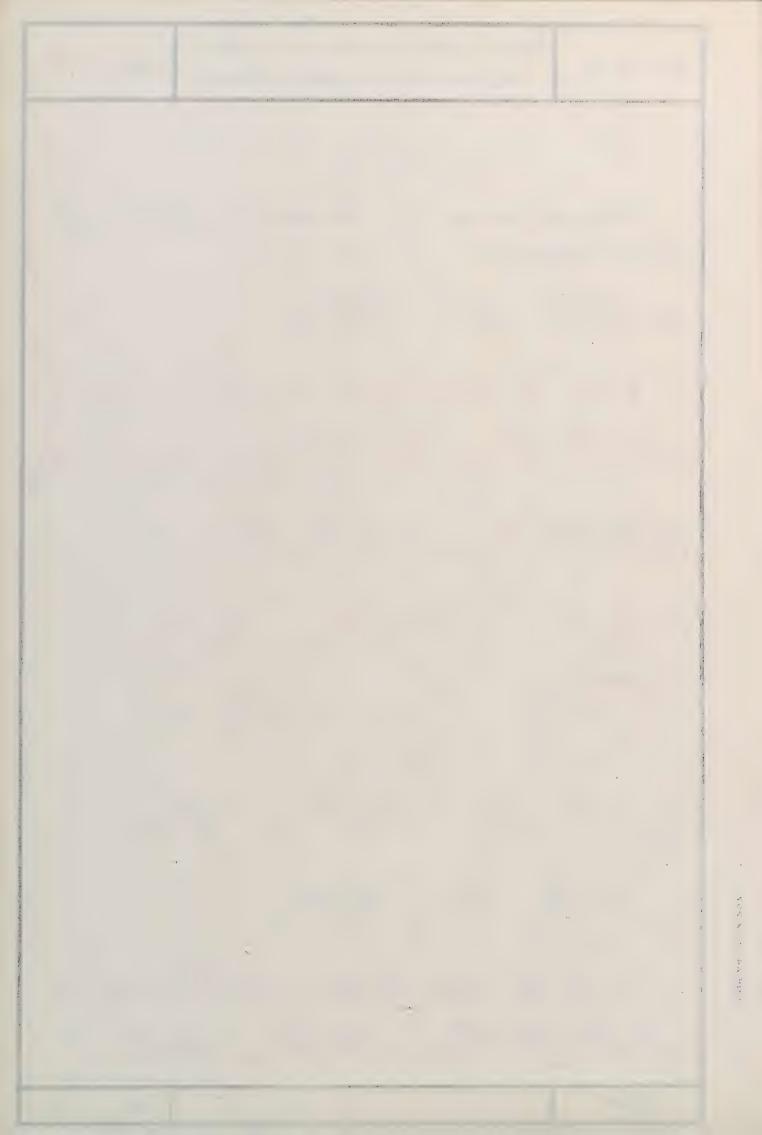
 $= \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2} l_{12}$

 $b_{20}' = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \lambda_{12} = \frac{1+5+2\sqrt{5}}{8} \cdot \lambda_{12} = \frac{3+\sqrt{5}}{4} \cdot \lambda_{12}$

 $c_{b}^{\prime} = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{15}}{12} \times \frac{1 + \sqrt{5}}{2} l_{12} = \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{15}}{6} l_{12}$

Demrrollo del calculo auterior: $C_b = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{15}}{12} \times \frac{1 + \sqrt{5}}{2} l_{12} =$

 $= \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{15} + 3\sqrt{15} + 5\sqrt{3}}{24} l_{12} = \frac{8\sqrt{3} + 4\sqrt{15}}{24} l_{12} = \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{15}}{6} l_{12}$



$$e'_{10} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}} \times \frac{1 + \sqrt{5}}{2} l_{12} = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}} l_{12}$$

Desarrollo del cálculo auterior:
$$e'_{20} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times \frac{1+\sqrt{5}}{2} l_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})^2}{40}} l_{12} = \sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(6+2\sqrt{5})}{40}} l_{2} = \sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{20}} l_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{15 + 3\sqrt{5} + 5\sqrt{5} + 5}{20}} l_{12} = \sqrt{\frac{20 + 8\sqrt{5}}{20}} l_{12} = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}} l_{12}$$

$$f_2' = Q_2' = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$$

$$g_{20}^{\prime} = \sqrt{\frac{5-15}{10}} \times \frac{1+15}{3} \ell_{12} = \sqrt{\frac{5+15}{10}} \ell_{12}$$

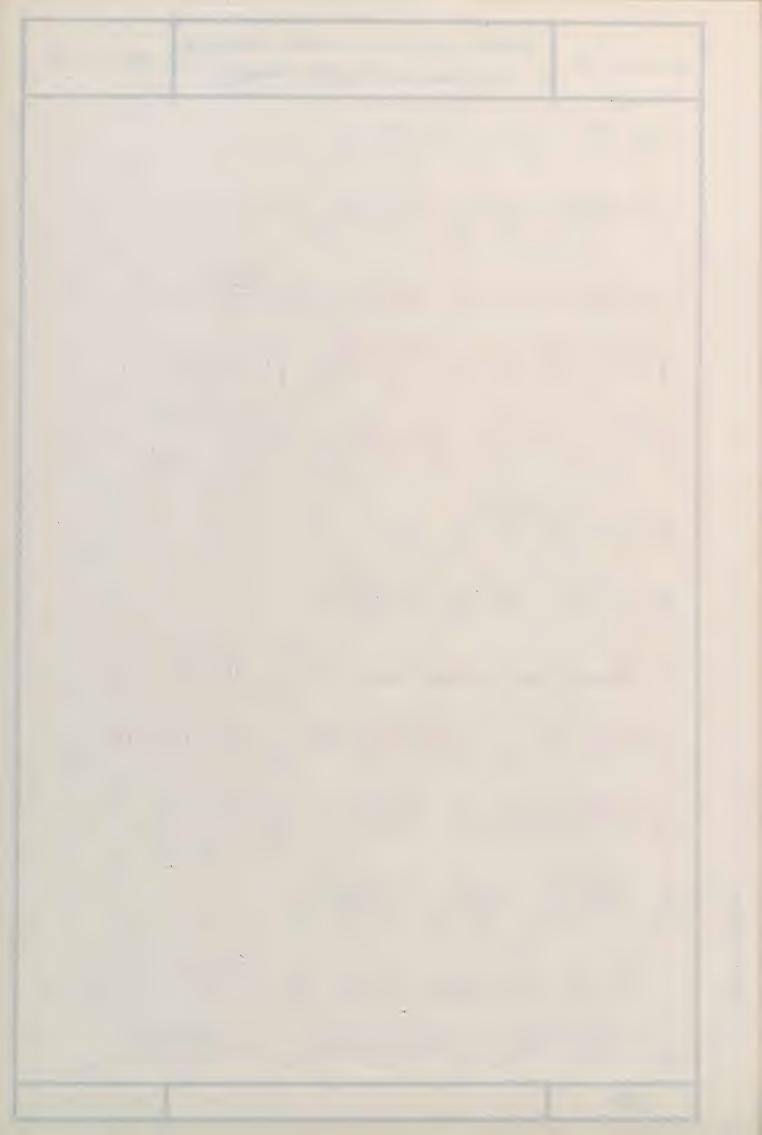
Desarrollo del cálculo anterior:
$$g_{20}^{\prime} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \times \frac{1+\sqrt{5}}{2} l_{12} =$$

$$\sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})^2}{40}} l_{12} = \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(6+2\sqrt{5})}{40}} l_{12} = \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{20}} l_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{15 - 3\sqrt{5} + 5\sqrt{5} - 5}{20}} l_{12} = \sqrt{\frac{10 + 2\sqrt{5}}{20}} l_{12} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}} l_{12}$$

$$h'_{20} = \sqrt{\frac{5+315}{20}} \times \frac{1+15}{2} /_{12} = \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{40}} \ell_{12}$$

$$= \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(1+\sqrt{5})^2}{80}} l_{12} = \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})}{80}} l_{12} = \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{40}} l_{12} =$$



$$= \sqrt{\frac{15+6\sqrt{5}+5\sqrt{5}+10}{40}} l_{12} = \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{40}} l_{12}$$

$$k'_{20} = \frac{\sqrt{3}}{6} \times \frac{1+\sqrt{5}}{2} l_{12} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12} l_{12}$$

$$S'_{20} = 5\sqrt{3} \times \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}I_{12}\right)^2 = \frac{5\sqrt{3}(6+5\sqrt{5})}{4}I_{12}^2 = \frac{5\sqrt{3}(3+\sqrt{5})}{2}I_{12}^2 = \frac{5\sqrt{3}(3+\sqrt{5})}{2$$

$$=\frac{15\sqrt{3}+5\sqrt{6}}{2}+\frac{3}{2}$$

$$V'_{20} = \frac{15 + 5\sqrt{5}}{12} \times \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1}{12}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{5 \times (11 + 5\sqrt{5})}{12}$$

Desarrollo del calculo auterior: Vi = 15+5 15 (1+ 15) =

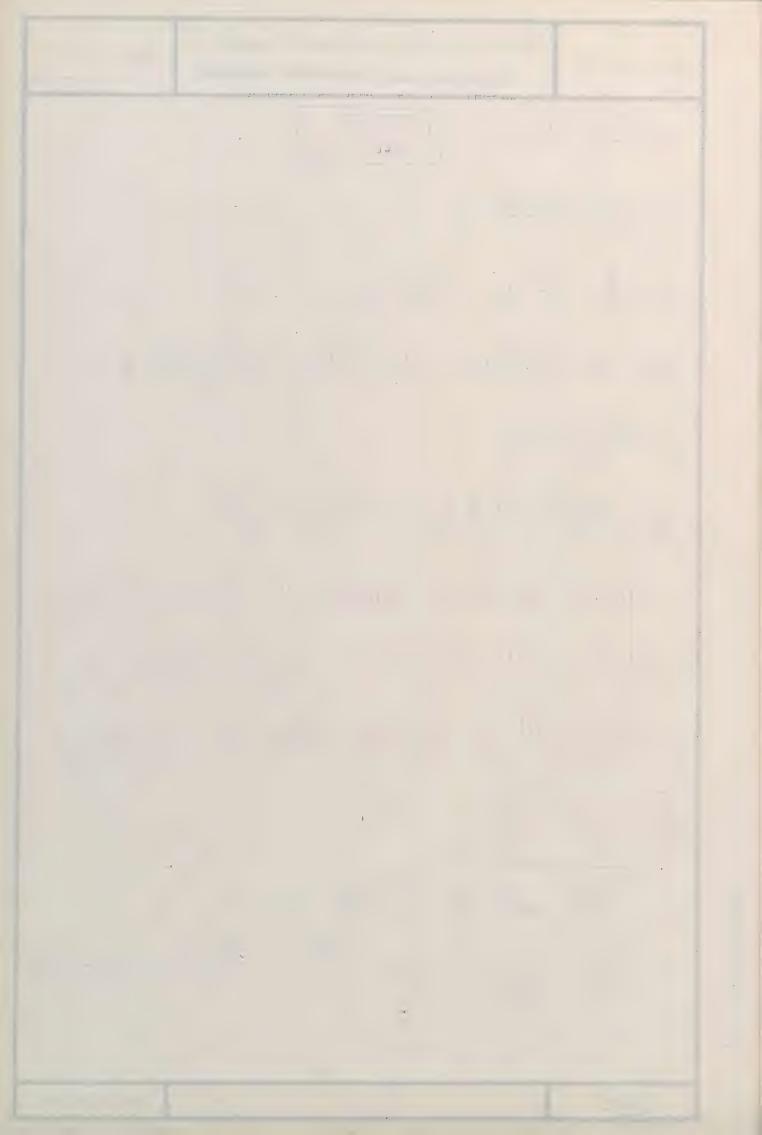
$$= \frac{15+5\sqrt{5}}{12} \times \frac{1+3\sqrt{5}+15+5\sqrt{5}}{8} \quad \ell_{12} = \frac{15+5\sqrt{5}}{12} \times \frac{16+8\sqrt{5}}{8} \quad \ell_{12} =$$

$$= \frac{(15+5\sqrt{5})(2+\sqrt{5})}{12} l_{12}^{3} = \frac{30+10\sqrt{5}+15\sqrt{5}+25}{12} l_{12}^{3} = \frac{55+25\sqrt{5}}{12} l_{12}^{3} =$$

$$=\frac{5 \times (41 + 5 \sqrt{5})}{12} l_{12}^{3}$$

ion il de de monde relaciones:

a)
$$\frac{f_{12}}{f_{23}'} = \frac{1}{1+15} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{15\cdot 1} = \frac{\sqrt{5}-1}{5-1}$$
 (ou formula [2])



b)
$$\frac{S_{12}}{S_{20}'} = \frac{3\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{\frac{15\sqrt{12}+5\sqrt{10}}{2}} = \sqrt{\frac{3\cdot(5-1\sqrt{5})}{10}}$$

Desarrollo del calculo auterior: $\frac{S_{12}}{S_{20}'} = \frac{3\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} \ell_{12}^2}{15\sqrt{3} + 5\sqrt{15}} = \frac{15\sqrt{3} + 5\sqrt{15} \ell_{12}^2}{2}$

 $\frac{6\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{15\sqrt{3}+5\sqrt{15}} = 6\sqrt{25+10\sqrt{5}} \times (15\sqrt{3}-5\sqrt{15}) = \frac{2}{6\times5\times\sqrt{25+10\sqrt{5}}} \times (3\sqrt{3}-\sqrt{5})$ $\frac{6\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{15\sqrt{3}+5\sqrt{15}} = \frac{2}{6\times5\times\sqrt{25+10\sqrt{5}}} \times (3\sqrt{3}-\sqrt{5})$ $\frac{2}{6\times5\times\sqrt{25+10\sqrt{5}}} \times (3\sqrt{3}-\sqrt{5})$ $\frac{2}{6\times5\times\sqrt{25+10\sqrt{5}}} \times (3\sqrt{3}-\sqrt{5})$ $\frac{2}{6\times5\times\sqrt{25+10\sqrt{5}}} \times (3\sqrt{3}-\sqrt{5})$

 $\sqrt{(25+10 \, \text{V5})(3 \, \text{V3}-\text{V15})^2} = \sqrt{(25+10 \, \text{V5})(27+15-6 \, \text{V45})}$

 $\sqrt{(25+10\sqrt{5})(42-18\sqrt{5})} = \sqrt{6*(25+10\sqrt{5})(7-3\sqrt{5})}$

 $\frac{\sqrt{6} \times (175 + 70\sqrt{5} - 75\sqrt{5} - 150)}{10} = \frac{\sqrt{6} \times (25 - 5\sqrt{5})}{10} = \frac{\sqrt{6} \times 5 \times (5 - \sqrt{5})}{10}$

 $= \sqrt{\frac{30(5-\sqrt{5})}{100}} = \sqrt{\frac{3\times(5-\sqrt{5})}{100}}$

C) $\frac{V_{12}}{V_{12}'} = \frac{\frac{4\sqrt{5} + 15}{4\sqrt{5}} \int_{12}^{3}}{\frac{5 \times (11 + 5\sqrt{5})}{12}} = \frac{3 \times (5 - \sqrt{5})}{10}$

Desarrollo del calculo anterior: $\frac{V_e}{V_0'} = \frac{7\sqrt{5} + 15}{4} \ell_{12}^{3} = \frac{5(11 + 5\sqrt{5})}{12} \ell_{12}^{3}$

 $= \frac{12(7\sqrt{5} + 15)}{20(11 + 5\sqrt{5})} = \frac{3(7\sqrt{5} + 15)(5\sqrt{5} - 11)}{5\cdot(125 - 121)} = \frac{3(175 + 75\sqrt{5} - 77\sqrt{5} - 165)}{5\cdot(125 - 121)}$

 $= \frac{3 \times (10 - 2 \sqrt{5})}{20} = \boxed{\frac{3 \times (5 - \sqrt{5})}{10}}$



En el cuadro sinoptico dado a continuación, resuminant

CUADRO SINOPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
(164)	1+ \(\frac{1}{5}\)	1, 61 80 34 1,2
(165) a' ₂₀	V5 + 2 V5	1.53 88 42 1,2
(166) b'20	3 + V5 4 12	1, 30 90 17 1,2
(167) C'20	2 V3 + V15 6 42	1, 22 28 47 1,2
(168) d'20	V3 + VIS 1,2	0. 93 41 72 1,2
(ieq) 2 P20	sen 420 = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{15}}{6}	sen 4 ₂₀ = 0.93 41 72 2 4 ₂₀ = 138° 11' 22,8"
(170) e'20	V 5 + 218 /12	1, 37 63 82 1,2
(171) F' ₂₀	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} l_{12}$	1, 37 63 82
(172) g'20	V 5 + 15 12	0, 85 06 51 /12
(173) h'20	V 25 + 11 V5 40	1, 11 '35 16 1,2
(174) 11	V 5 + V5	0,85 06 51 112
(175) k'20	V3 + V15	0, 46 70 86 /12
(176) S'20	15 V3 + 5 V15 12	
(177) V'20	5 × (11 + 5 /5) 1/2	9, 24 18 08 1,2
Relaciones entre magnitudes		
(173)		0, 61 80 34
(179) S ₁₂ : S' ₂₀	V3 * (5 - V5)	0, 91 05 93
(18c) V12: V20	3 × (5 - 12)	0, 22 9/ 20

(S12 : S2) = V12 : 1/23

UNE A4 210 X 297



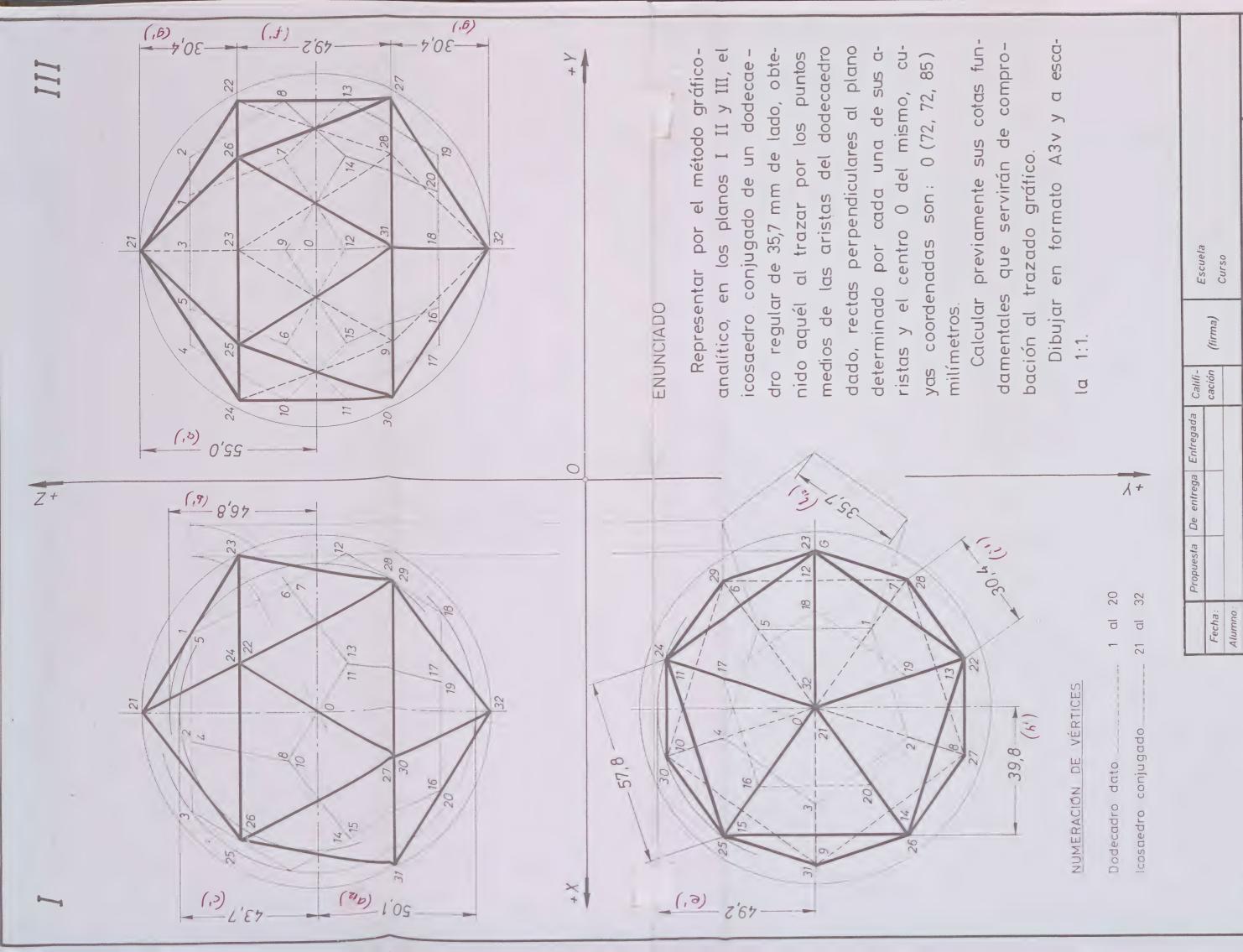


Lámina conjugados

convexos

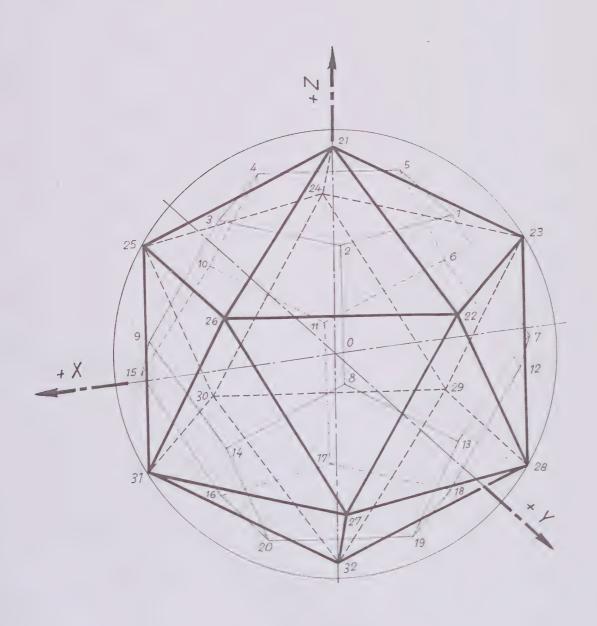
Poliedros regulares

1:1

Escala

91







Lanina 17

ENUNCIDDO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I. II g III, el dodecaedro conjugado de un i cosa e de cequelar de 57,8 mm de lado, obternido aquel al trasar por los puntos medios de so muitas au mondro dado, cectas perpendiculares al plano de termina do por cada uma de sus aristas y el centro O del mismo, enyas coordenadas son: 6/22, 22, 25).

Calcular previamente sus cotas inde como que serviran de comprebación al trasado qualico. Dibujar en formato 43v a escala 1:1.

0 (72, 72, 85) m m DATOS l, = 57, 2 11.

JNE A4 210 X 297



El poliedro conjugado de un icosaedro regular, es un dodecaedro regular.

El conjugado pedido con las condiciones del enunciado tiene sus aristas perpendiculares a las del icosaedro, y ambas se contam en sus punto medios. For consigniente, la esfera tangente a las aristas de ambos poliedros, es comin, y el punto de contacto de dicha esfera con las aristas es precisamente el punto de intersección de las mismas.

Por otra parte, si projectamos ortogonalmente los virticos del dedicardos commendo estre las caspectaras casas del isosaccio dado, dicha projección coincise con el centro de cada cara tima gular del icosaecho.

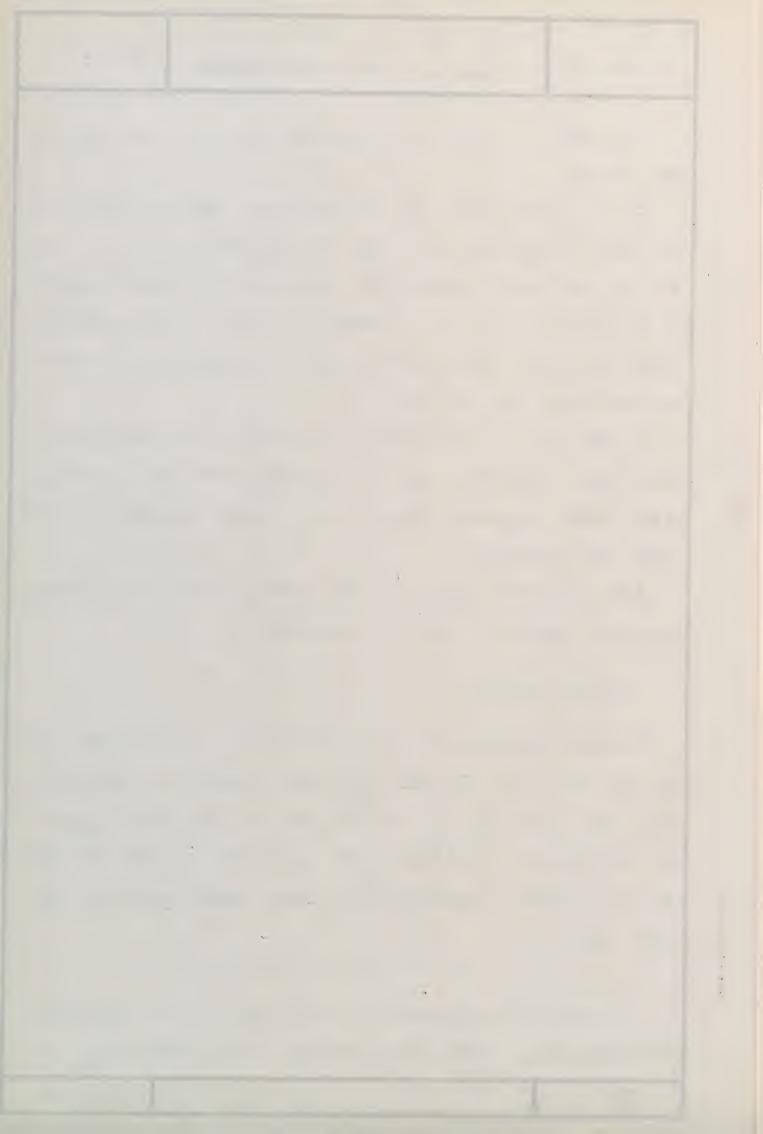
restas propriedades mes permiten resolver facilmente la representación propuerta en el enunciado.

PRUCESO GRAFICO

Encedames periamente a la representación del icoraldos dede en los planos I, II y III empo lado, conocido, es de 57.8 mm. Para ello utilizaremos el trasado dado en el "Presso esético" de la l'amino E. de Emminando prenamente el valor del nadeo Q20 de la esfera circumsente lacer Faceso graines analetes ony o valor será:

a = 0,95 10 57 x 57,8 = 55,0 mm

del dedicarios pertedo, curse conto no es car monto con es del



icosarcho dado, y las arestes de las bases, proporticularing en el punto cardio a las del icosarcho (se comersta da perposertica-laridad en el plano II por mes diches arestas de las bases, paralelas a I). Pou ello a consigne la representación complete en el plano II.

Las aristas de ambos potendros, y terrendo la representación del dedecaredro conjugado en II, permite realisar la del mismo en el plano I, y con ambos proyecciones la del plano II.

Con la commeración adecuada de los vértices y centro de amtos folados quedas à competada la representación podida.

PROCESO GRAFICO- ANALÍTICO

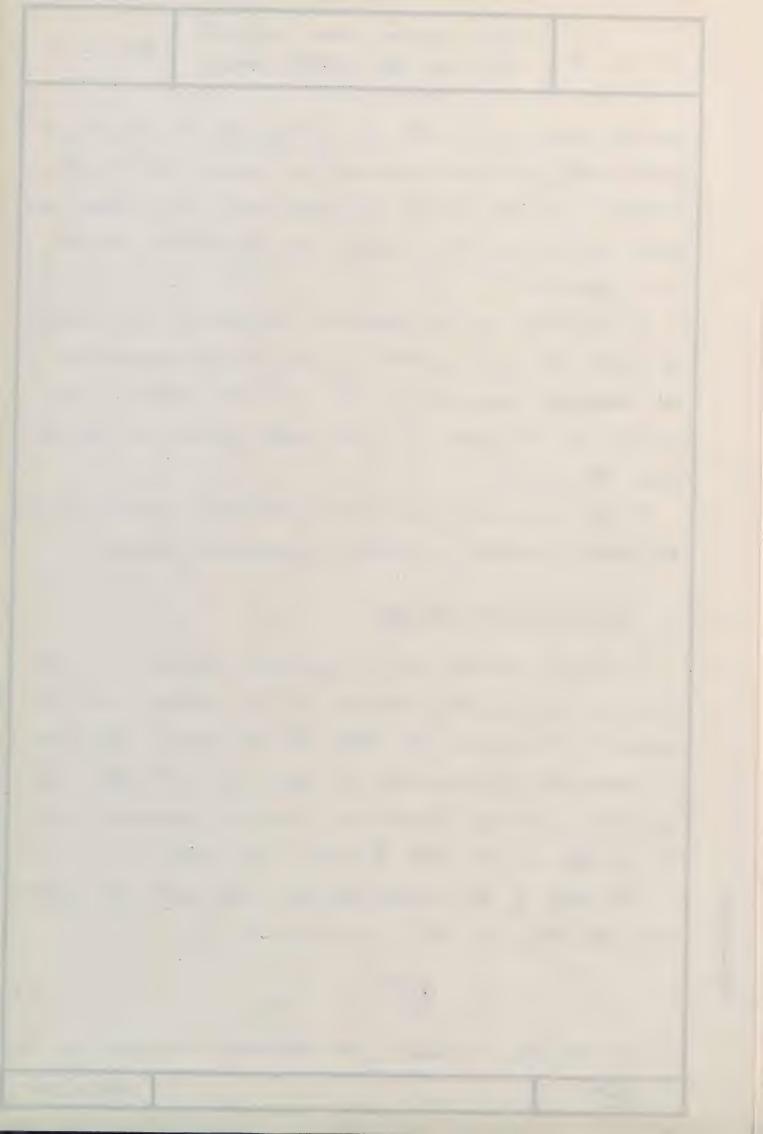
El carrelo analítico de las magnificates acotadas en la lamina 17 se desarrolla tomadose en el efectuado en la lámina 4, en función del lado la del intrasdes conjugado.

Presiamente se determinarà el radio a' de la esfera circumsonità al mirmo, termendo en cuenta la resultara en sonbos poliedros, de la esfera tangente a las aristes.

de mades b de la esfora tanquete a las arestas del icoras-

[1]

I por etra parte, el lado l'e del dedecado conjugado, en fun-



cion de 6/2 es

$$\ell'_{12} = \frac{4}{3+\sqrt{5}} b'_{12} = \frac{4}{3+\sqrt{5}} \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{4}} \ell_{20} = \frac{1+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} \ell_{20} = \frac{(1+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{4} \ell_{20} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \ell_{20} =$$

$$= \frac{3+3\sqrt{5}-\sqrt{5}-5}{4} l_{20} = \frac{2\sqrt{5}-2}{4} l_{20} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} l_{20}$$
 [2]

conocido l'12 en funcion de l₂₀, se calcularais les oignients, valors:

$$\ell'_{12} = \frac{\sqrt{5-1}}{2} \ell_{20} = 0.61.80.34 \times 57.83.03.93 = 35.74.11.47$$

$$\frac{l_{12}}{l_{20}} = \frac{V_5 - 1}{2} = 0, 61.80.34...$$
 [3]

$$e'_{12} = 1,37 63 82 \times id = 49,2 ...$$

$$g_{12}' = 0.25 \text{ oc } 51$$
 , id = ?0.4

^{*}to a = 55 mm.; de doude $l_{20} = 55$: 0,95 10 57 = 57,83 03 93 g de aqui: $b_{20} = 57$.83 03 93 × 0,80 90 17 = 46,78 57 69, por lo que será: $a_{20} = 66$, 78 57 69: 1.30 90 17 = 35,74 11 47



1 = 0, 85 06 59 x 35, 74 11 47 = 30, 4 1 10 k' = 0, 68 81 91 × id

Thrivere que siendo

$$e'_{12} = \sqrt{\frac{5+217}{5}} \int_{12}^{1}$$

$$\frac{l_{12}}{l_{22}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad \text{or verificate.}$$

$$e'_{12} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} \quad \ell'_{12} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} \times \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad \ell_{20} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \quad \ell_{20}$$

$$e_{12}^{l} = e_{20}^{l}$$

El desarrollo del calculo auterior es el signiente:

$$e'_{12} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} e'_{12} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} \times \frac{\sqrt{5}-1}{2} e_{20} = \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(\sqrt{5}-1)^2}{20}} e_{20} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} e'_{12} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5$$

$$= \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{r})(5+1-2\sqrt{r})}{20}} \ell_{20} = \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{r})(3-\sqrt{r})}{10}} \ell_{20} = \sqrt{\frac{15+6\sqrt{r}-5\sqrt{r}-10}{10}} \ell_{20} = \sqrt{\frac{15+6\sqrt{r}-5\sqrt{r}-10}} \ell_{20} = \sqrt{\frac{15+6$$

lo cual no demnestra que: "El radio de la circunferencia circumscrita al deager requier, contorno en I del dorivardo conjugado, es ismal al del insaedro dad e la muma

De aqui se deduce que los lados de ambos decargomos



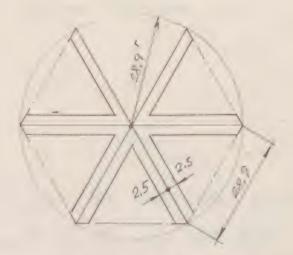
son tambien ignales, por la que

FIGURA CORPÓREA

il dochecacedro compagneto se obtime pa el acoplamiento de 12 pentagonos regulares de 35,7 mm de lado.

El remandro dado se oblima formando premamente 12 pirámides pentagonales (hauspanentes y sin base), curjas caras latinales son 5 taianquelos equilatero de 28,9 mm (mitad del lado
del insaedro). Estas pirármides a acoplarais sobre cada uma de
las doce caras del compagado, de forma que sus restites esteu en
los puntos medios de las aristas de aquel.

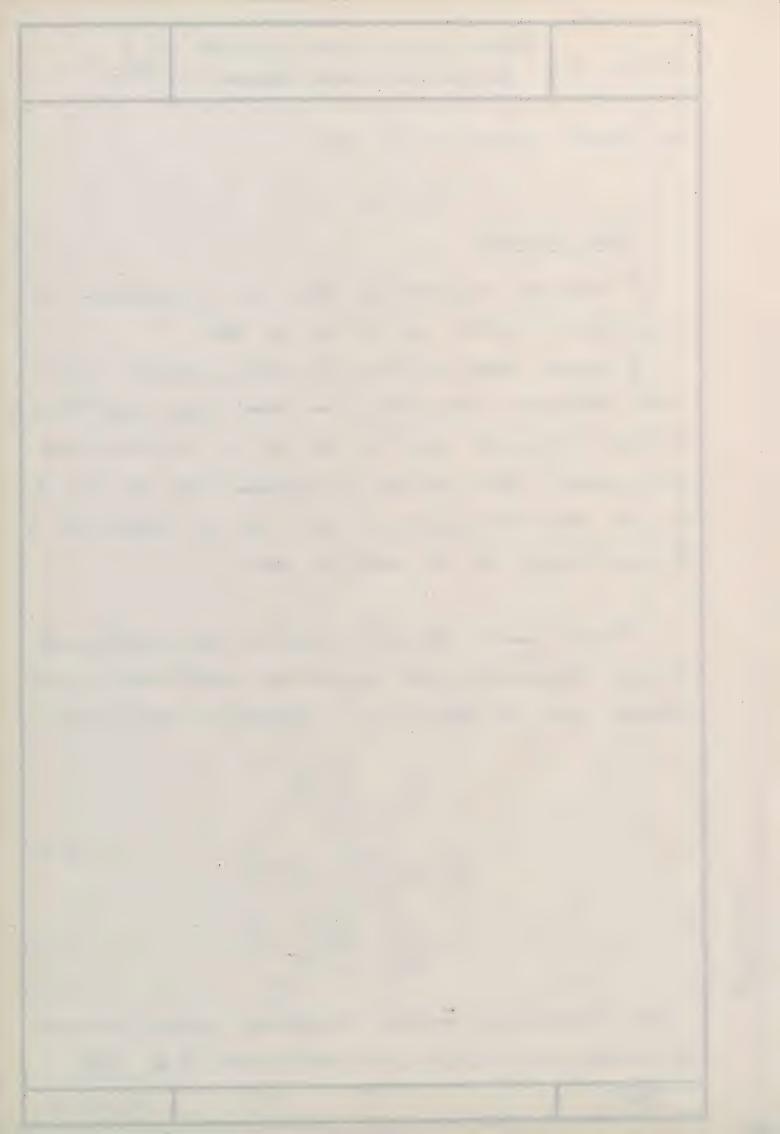
Cambien puede obtenerse el icosaecho dado, sustituyendo las caras transparente, de las 12 piramises pentagonales, por las obtenidas seguin el trasado que re representa a continuación:



12 /u)

Estas 12 peranueles ou acultaran al dodocardo compugado, colorando sus vértices A, B, C, D, E, en los pentos medios de las aristas

18 - 4 - 72



Numericlatura constitues:

1's = Lado del dodecaedro conjugado.

a' : Radis de la estora circunscrita al mismo.

b' = Radio de la esfera tangente a las aristas.

C'12 = Radio de la esfera inscrita.

d'e Radio de la circumferencia circumscrita al poligono de

24/2 = Angulo aectilines del diedro formado por dos caras contiguas.

C'12 = Radio de la circumperencia circumscrita al decagono regular, contorno de la vista I.

f's = Altura interemedia del contorno de las vietas I g II.

g'e = Aluras extremas del contorno de las vistas I g II.

l's Lado del decagono regular, contorno de la viola II.

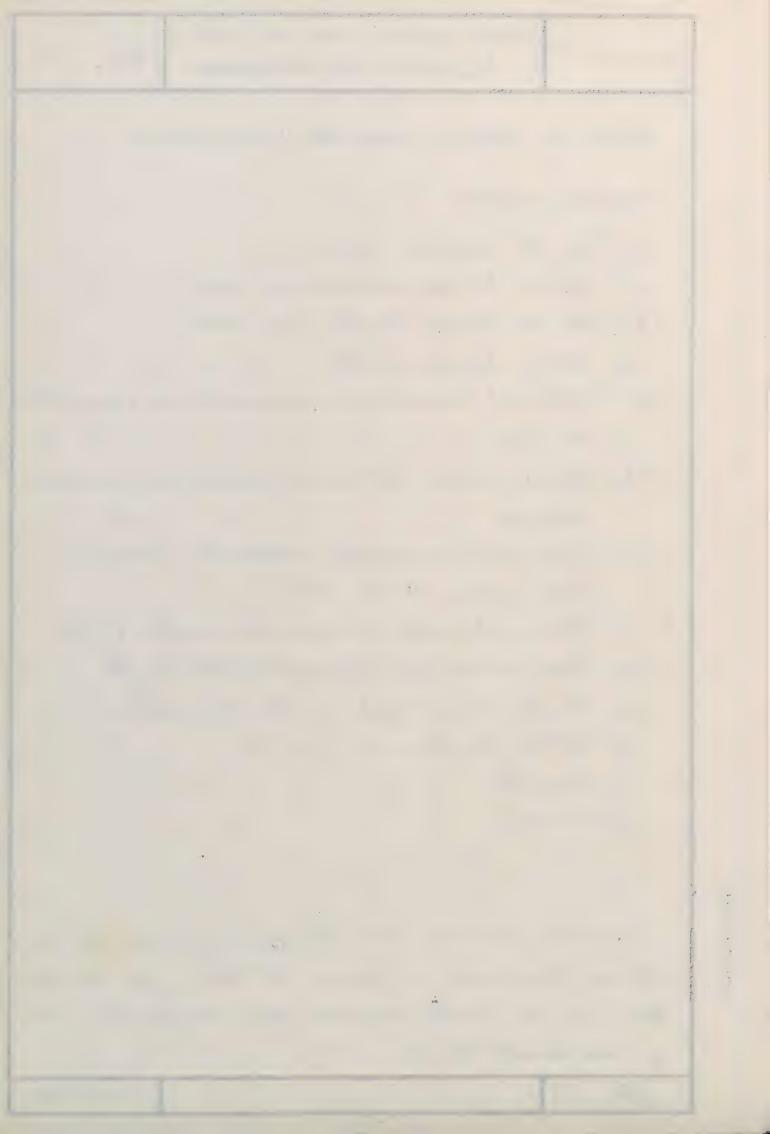
k'z = Spotema del poligono de una cara,

S' = Superficie,

V'z - Volumen.

des valous autours du deserveire aujugads, pur den etternesse directamente en función del lade lo des resacres dado, ya que el valor conocido de la en función de lo (ver formula [2]), es

UNE A4 210 X 297



Lustitujends este valor en las formula, 30 a 41 de la lamima 6, tendremos:

$$a_{12}' = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{4} \times \frac{\sqrt{5} - 1}{2} |_{20} = \frac{\sqrt{3}}{2} |_{20}$$

Desarrollo del calculo auterior: $a_{k}' = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{4} \times \frac{\sqrt{5} - 1}{2} l_{20} =$

$$= \frac{\sqrt{75} + \sqrt{15} - \sqrt{15} - \sqrt{3}}{8} l_{20} = \frac{5\sqrt{3} - \sqrt{3}}{8} l_{20} = \frac{\sqrt{3}}{2} l_{20}$$

$$b'_{12} = \frac{3+\sqrt{5}}{4} \times \frac{\sqrt{5}-1}{2} l_{20} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} l_{20}$$

Desarrollo del calculo auterior: $b_{12}^{1} = \frac{3+\sqrt{5}}{4} \times \frac{\sqrt{5}-1}{2} |_{20} =$

$$= \frac{3\sqrt{5} + 5 - 3 - \sqrt{5}}{8} l_{20} = \frac{2\sqrt{5} + 2}{8} l_{20} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} l_{20}$$

$$C'_{12} = \sqrt{\frac{11\sqrt{5} + 25}{40}} \times \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{20}} I_{20}$$

Desarrollo del calculo anterior: c' = \(\frac{11 \sqrt{5} + 25}{40} \times \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right|_{20} =

$$= \sqrt{\frac{(11\sqrt{5} + 25)(\sqrt{5} - 1)^2}{40 \times 4}} l_{20} = \sqrt{\frac{(11\sqrt{5} + 25)(5 + 1 - 2\sqrt{5})}{40 \times 4}} l_{20} =$$

$$= \sqrt{\frac{(4\sqrt{5} + 25)(3 - \sqrt{5})}{40 \times 2}} l_{20} = \sqrt{\frac{33\sqrt{5} + 75 - 55 - 25\sqrt{5}}{40 \times 2}} l_{20} = \sqrt{\frac{20 + 8\sqrt{5}}{80}} l_{20}$$



Min ~ 8

$$d_{10}' = \sqrt{\frac{5+15}{10}} \times \frac{\sqrt{5-1}}{2} |_{20} = \sqrt{\frac{5-15}{10}} |_{20}$$

Jesavrollo del calculo auterion: $d'_{12} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times \frac{\sqrt{5}-1}{2} l_{20} =$

$$= \sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(\sqrt{5}-1)^2}{10\times4}} \, l_{20} = \sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(5+1-2\sqrt{5})}{40}} \, l_{20} = \sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{20}} \, l_{20} = \sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(\sqrt{5}-1)^2}{20}} \, l_{20} = \sqrt$$

$$= \sqrt{\frac{15 + 3\sqrt{5} - 5\sqrt{5} - 5}{20}} l_{20} = \sqrt{\frac{10 - 2\sqrt{5}}{20}} l_{20} = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}} l_{20}$$

$$e'_{12} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} \times \frac{\sqrt{5}-1}{2} l_{20} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} l_{20}$$

Desarrollo del calculo anterior: $e_{12}^1 = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} \times \frac{\sqrt{5}-1}{2} l_{22} =$

$$= \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(\sqrt{5}-1)^2}{5\times4}} = \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(5+1-2\sqrt{5})}{20}} |_{20} = \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{10}} |_{20} =$$

$$= \sqrt{\frac{15 + 6\sqrt{5} - 5\sqrt{5} - 10}{10}} \ l_{20} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}} \ l_{2c}$$

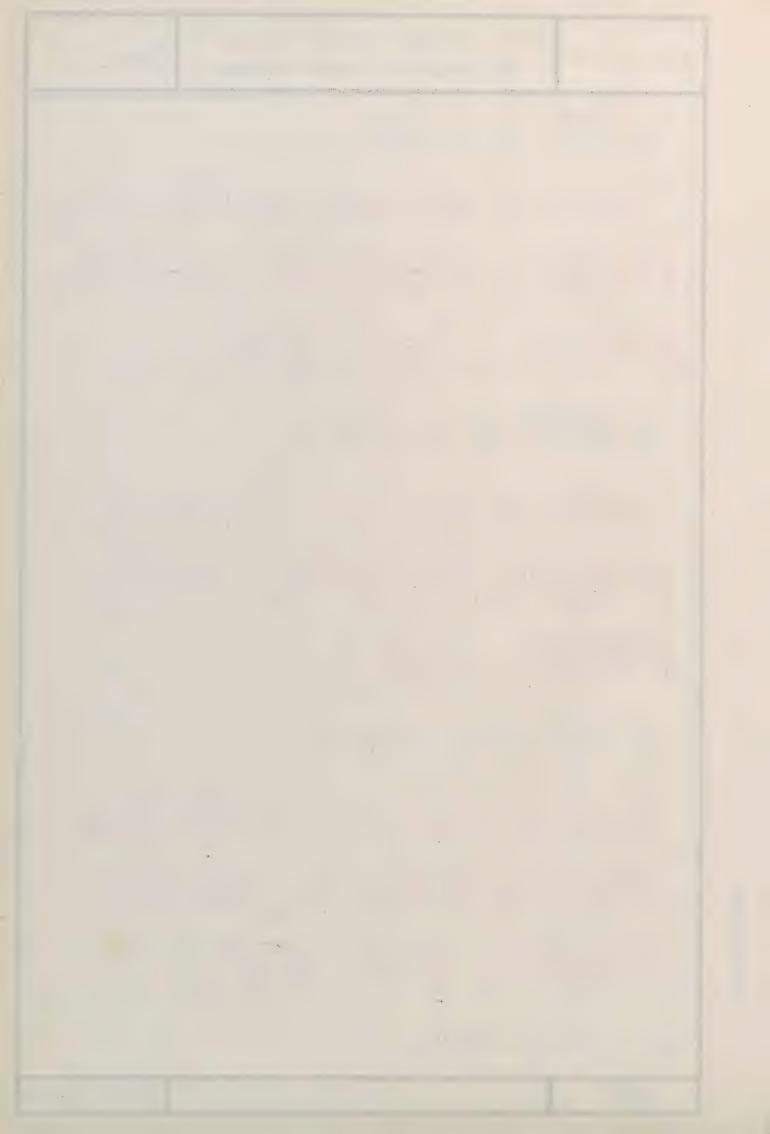
$$f'_{12} = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}} \times \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \ell_{20} = \sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{5}} \ell_{20}$$

Desarrollo del calculo auterior : $f_{12} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \times \frac{\sqrt{5-1}}{2} l_{20} =$

$$= \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(\sqrt{5}-1)^2}{10\times 4}} l_{20} = \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(5+1-2\sqrt{5})}{40}} l_{20} = \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{20}} l_{20} = \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(3-\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{20}} l_{20} = \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(3-\sqrt{5})(3-\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{20}} l_{20} = \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(3-\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{20}} l_{20} = \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(3-\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{20}} l_{20} = \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(3-\sqrt{5})(3-\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{20}} l_{20} = \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(3-\sqrt{5})(3-\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{20}} l_{20} = \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(3-\sqrt{5})(3-\sqrt{5})(3-\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{20}} l_{20} = \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(3-\sqrt{5})(3-\sqrt{5})(3-\sqrt{5})(3-\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{20}} l_{20} = \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5$$

$$= \sqrt{\frac{15 - 3\sqrt{5} - 5\sqrt{5} + 5}{20}} l_{20} = \sqrt{\frac{20 - 8\sqrt{5}}{20}} l_{20} = \sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{5}} l_{20}$$

$$g_{12}' = i_{12}' = d_{12}' = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}} f_{20}$$



$$k'_{12} = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{20}} \times \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \ell_{20} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}} \ell_{20} = \frac{1}{2} e'_{12}$$

Desarrollo del calculo antirior: $k'_{R} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{2i}} \times \frac{\sqrt{5}-1}{2} l_{20} =$

$$= \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(\sqrt{5}-1)^2}{20\times4}} l_{20} = \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(5+1-2\sqrt{5})}{80}} l_{20} = \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{40}} l_{20} =$$

$$= \sqrt{\frac{15 + 6\sqrt{5} - 5\sqrt{5} - 10}{40}} \ell_{20} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{40}} \ell_{20} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}} \ell_{20}$$

$$S_{12}^{1} = 3\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} * \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\ell_{20}\right)^{2} = \frac{3}{2}\sqrt{10(5 - \sqrt{5})}\ell_{20}^{2}$$

Desarrollo del calculo auterior: $S_{12}^{\prime} = 3\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} \times \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}l_{24}\right)^2 =$

$$= 3\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} \times \frac{(\sqrt{5} - 1)^2}{4} \ell_{22} = 3\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} \times \frac{6 - 2\sqrt{5}}{4} \ell_{20} =$$

$$=\frac{3}{2}\sqrt{(25+10\,\text{VF})(3-\text{VF})^2}\,\ell_{20}^2=\frac{3}{2}\sqrt{(25+10\,\text{VF})(9+5-6\,\text{VF})}\,\ell_{20}^2=$$

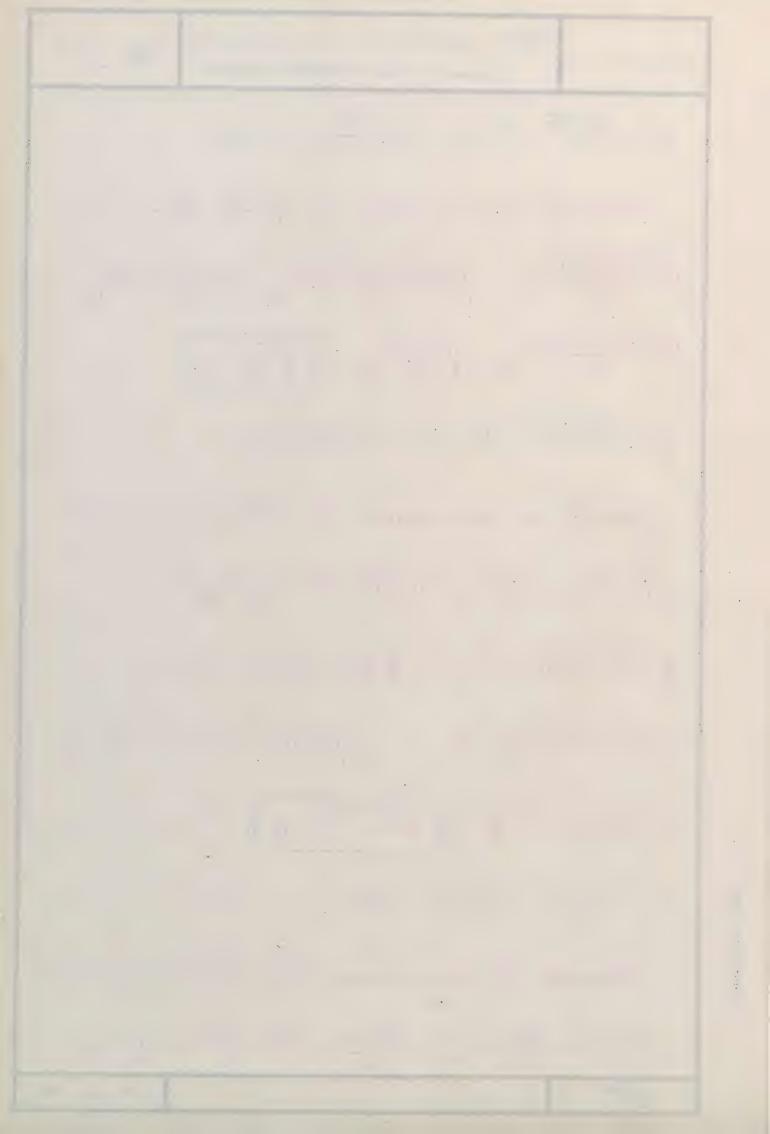
$$= \frac{3}{2} \sqrt{(25 + 10 \, \text{VF}) \times 2 \times (7 - 3 \, \text{VF})} \, \ell_{20}^2 = \frac{3}{2} \sqrt{2 \cdot (175 + 70 \, \text{VF} - 75 \, \text{VF} - 150)} \, \ell_{20}^2 =$$

$$= \frac{3}{2} \sqrt{2 \times (25 - 5\sqrt{5})} \quad \ell_{20}^{2} = \frac{3}{2} \sqrt{10 \times (5 - \sqrt{5})} \quad \ell_{20}^{2}$$

$$V'_{12} = \frac{7\sqrt{5} + 15}{4} \times \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \int_{20}^{3} = \frac{5 + \sqrt{5}}{4} \ell_{20}^{3}$$

Desarrollo del calculo auterior: $V'_{12} = \frac{7\sqrt{5} + 15}{4} \times \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}l_{20}\right)^3 =$

$$= \frac{7\sqrt{5} + 15}{4} \times \frac{(\sqrt{5} - 1)^3}{8} \ell_{20} = \frac{7\sqrt{5} + 15}{4} \times \frac{5\sqrt{5} - 15 + 3\sqrt{5} - 1}{8} \ell_{20}^3 =$$



Okrie a. 10

 $= \frac{7\sqrt{5} + 15}{4} \cdot \frac{8\sqrt{5} - 16}{8} \cdot \frac{3}{20} = \frac{(7\sqrt{5} + 15)(\sqrt{5} - 2)}{4} \cdot \frac{3}{20} = \frac{35 + 15\sqrt{5} - 14\sqrt{5} - 30}{4} \cdot \frac{3}{20}$

Son vitiles las signientes celaciones:

a)
$$\frac{l_{20}}{l'_{12}} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(15+1)}{4} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

(per formed TOI)

b)
$$\frac{S_{20}}{S_{12}'} = \frac{5 \sqrt{3}}{\frac{3}{2} \sqrt{10} (5 - \sqrt{r})} \ell^{2} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{r}}{6}}$$

Desarrollo del extenso auterior: $\frac{S_{20}}{S_{12}'} = \frac{5\sqrt{3}}{\frac{3}{2}\sqrt{10}(5-\sqrt{r})} \frac{l_{20}^2}{l_{20}^2}$

$$\frac{10 \quad \sqrt{3}}{3\sqrt{10}(5-\sqrt{5})} = \frac{10 \quad \sqrt{3} \quad \sqrt{10}(5-\sqrt{5})}{3\times10\times(5-\sqrt{5})} = \frac{\sqrt{30}(5-\sqrt{5})}{3(5-\sqrt{5})} = \frac{\sqrt{30}(5-\sqrt{5})}{3\times20} = \frac{10 \quad \sqrt{3}}{3\times20}$$

$$= \frac{\sqrt{30(5-\sqrt{r})(5+\sqrt{r})^2}}{60} = \frac{\sqrt{30\times20\times(5+\sqrt{r})}}{60} = \frac{\sqrt{6\times(5+\sqrt{r})}}{6}$$

C)
$$\frac{V_{20}}{V_{12}} = \frac{\frac{15 + 5\sqrt{5}}{12} \ell_{20}}{\frac{5 + \sqrt{5}}{4} \ell_{20}} = \frac{5 + \sqrt{5}}{6}$$

Desarrollo del calculo auterior: $\frac{\sqrt{20}}{|V_{12}'|} = \frac{\frac{15+5\sqrt{5}}{12} \ell_{20}^3}{\frac{5+\sqrt{5}}{4} \ell_{20}^3} =$

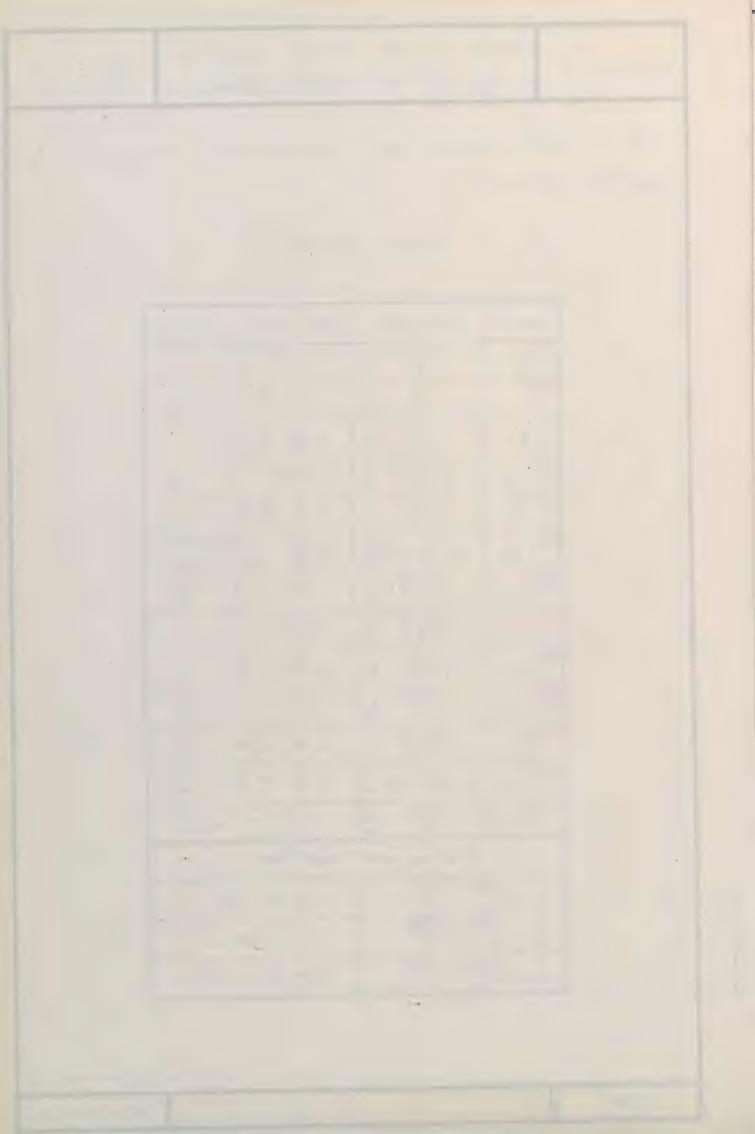
$$= \frac{4(15+5\sqrt{5})}{12(5+\sqrt{5})} = \frac{(15+5\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}{3\times20} = \frac{75+25\sqrt{5}-15\sqrt{5}-25}{60} = \frac{50+10\sqrt{5}}{60}$$

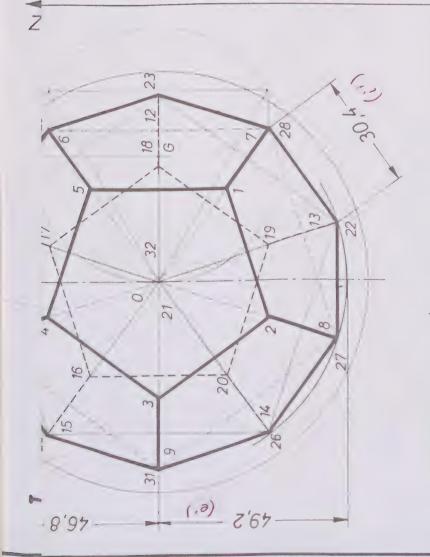


resultados auteriores.

CUADRO SINOPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado				
(187)	V5 -1 120	0, 61 80 34 120				
(182) Q ₁₂	$\frac{\sqrt{3}}{2}$ l_{20}	0, 86 60 25 120				
(183) b ₁₂	1 + V5 4 l20	0,80 90 17 120				
(184) C12	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}$ l_{20}	0, 68 81 91 620				
(185) d'12	V 5- V5	0, 52 57 31 /20				
(18c) 2 P12	Sen $9 = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$	sen 4,2 = 0, 85 06 51 2 4,2 = 116° 33' 54.2"				
(187) e ₁₂	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} _{20}$	0, 25 06 51 l ₂₀				
(188) f ₁₂	$\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}} l_{20}$	0, 32 49 20 - 1:0				
(189) 9 12	V 5- VS	0, 52 57 31 120				
(190) i,	V 5- V5	0, 52 57 31 /20				
(191) k 12	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} l_{20}$	0, 42 53 25 120				
(192) ₅₁₂	$\frac{3}{2} \sqrt{10 \times (5-\sqrt{5})} \left(\frac{2}{20}\right)$	7, 38 59 67 (20				
(193) V1	$\frac{5+\sqrt{5}}{4} \qquad l_{20}^{3}$	1, 80 90 17 (20				
Relaciones entre magnitudes						
l20: l'12	(194) <u>V5 + 1</u> 2	1, 61 80 34				
520: 512	$(145) \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{6}}$ $(146) 5 + \sqrt{5}$ 6	1, 09 81 85				
V20: V12	(146) 5 + V5 6	1, 20 60 11				





NUMERACIÓN DE VÉRTICES

1+

co-analítico, en los planos I, II y III, el dodecaedro conjugado de un ico-saedro regular de 57,8 mm de lado, obtenido aquél al trazar por los puntos medios de las aristas del icosaedro dado, rectas perpendículares al plano determinado por cada una de sus aristas y el centro 0 del mismo, cuyas coordenadas son: 0 (72, 72, 85) mm.

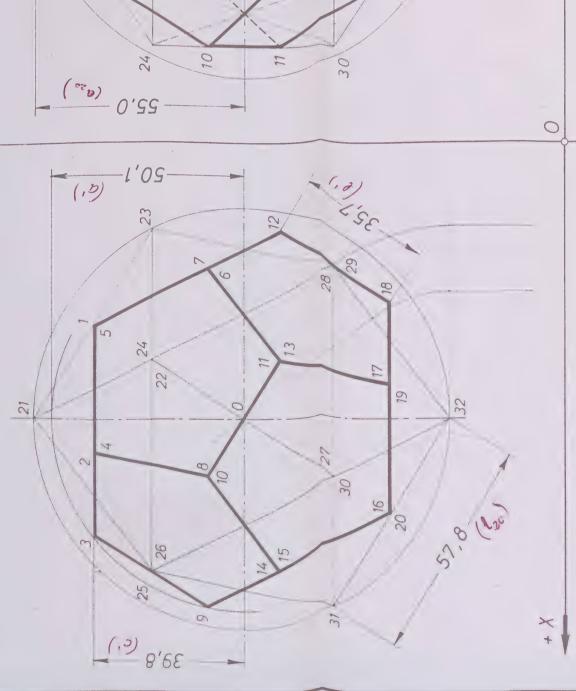
Calcular previamente sus cotas fundamentales que servirán de comprobación al trazado gráfico.

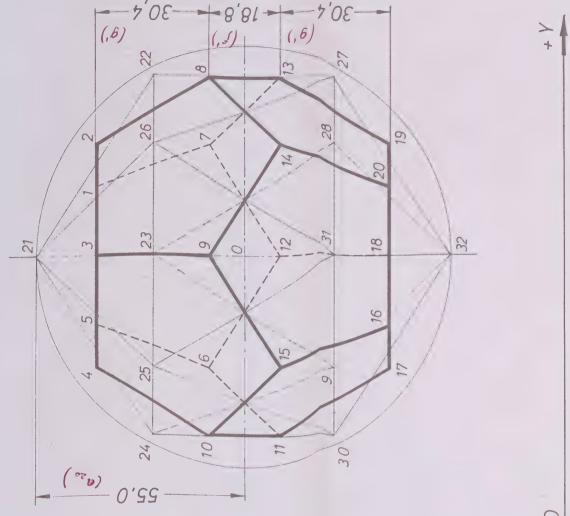
Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

Escuela	(firma)	02/1/20	Poliedros regulares convexos conjugados		
Califi- cación			res		
Propuesta De entrega Entregada Califi-			regular		
De entrega			dros 1		
Propuesta				Polie	
	Fecha:	Alumno:	Escala	1:1	

11

Z+





ENUNCIADO

mispuntos medios de las aristas del icoplanos I, II y III, cada una 0 (72, 72, por el método gráfiel dodecaedro conjugado de un icosaedro regular de 57,8 mm de lado, saedro dado, rectas perpendículares al trazar por los 0 del coordenadas son: al plano determinado por sus aristas y el centro en los Representar obtenido aquél co-analítico, cuyas MO, de

(, a)

Calcular previamente sus cotas fundamentales que servirán de comprobación al trazado gráfico.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

NUMERACIÓN DE VÉRTICES

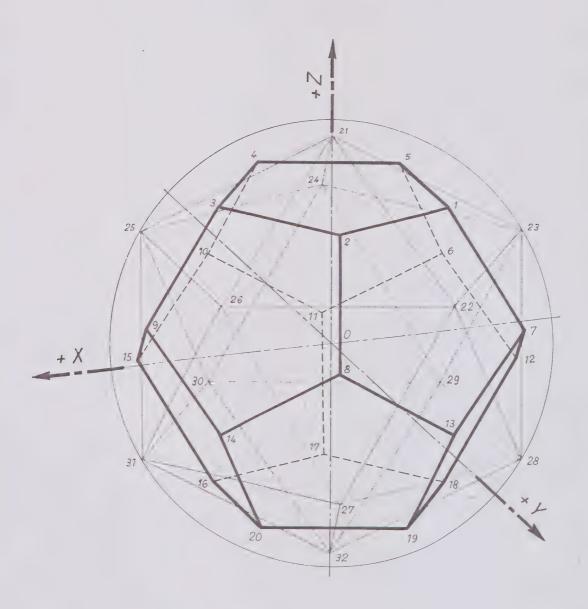
Dodecaedro conjugado..... 1 al 20

i- (firma) Escuela				convexos co
Propuesta De entrega Entregada Califi-	cación			Poliedros regulares convexos co
Propuesta	a .	: 00		1 Polie
	Fecha:	Alumno:	Escala	1:1

Lámina 17

njugados





Poliedros regulares convexos conjugados



Lamina 18

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II, y III, el poliedro obtenido por la intersección de los dos poliedros conjugados ce-presentados en los laimes 16, 17.

Dibujar en formato A3V y a escala 1:1.

 $\frac{DATOS}{l_{12}} = \frac{35.7}{57.8} \text{ m m}$ $\frac{l_{12}}{l_{20}} = \frac{57.8}{57.8} \text{ m m}$

UNE A4 210 X 297



doderando esquitas com un issendo, tambien resultar, conjugados en anterior, de cuino comuna y ion la estas trunçante a les aristas ignalmente comun a anetat, se iliene completando el trasado de la lamena 16 (o el de la lamena 17), con los laianquelos equilales, y pentagonos respectares que se formase al ser cortado cada aimedo selvas de suo de ellos por las caras del otro. Dos vértices de estos por pentagonos estarais en los pentos medios de las aristas de ambes potencios.

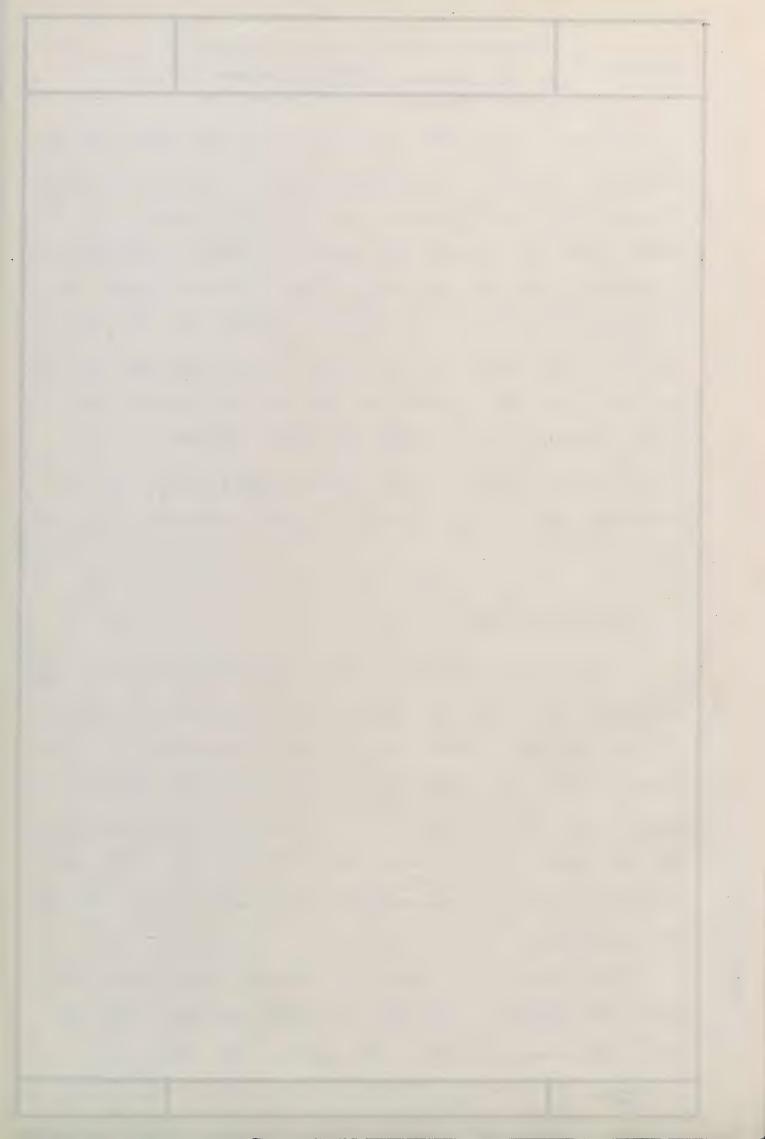
El "Peres annier" y el "rices matires anatives de la concurrence del la concurrence de la concurrence del la concurrence de la concurrence de la concurrence de la concurrence del la concurrence de la concurrenc

FIGURA CORPOREA

Le oblive les aci 'amiento de 12 piramides acctas (sim base), compuesta cada una de clas por 5 triangulos equilateros de 28.9 mm de lado de la la 120 = 57.8 mm) corresponde con obas 20 piramiedes acctas (sin base). compuesta cada una de ellas por 3 triangulos rectangulos isóco de de de catetos de 13.9 mm de lado (mitad de 35.7). Lista temasa de 28.9 mm, correspondientes estas siltimas a el compagado.

plano à cualquier cara de uno de los poliedros, deja en distintos remiespacios a los vértices del otro.

CC-

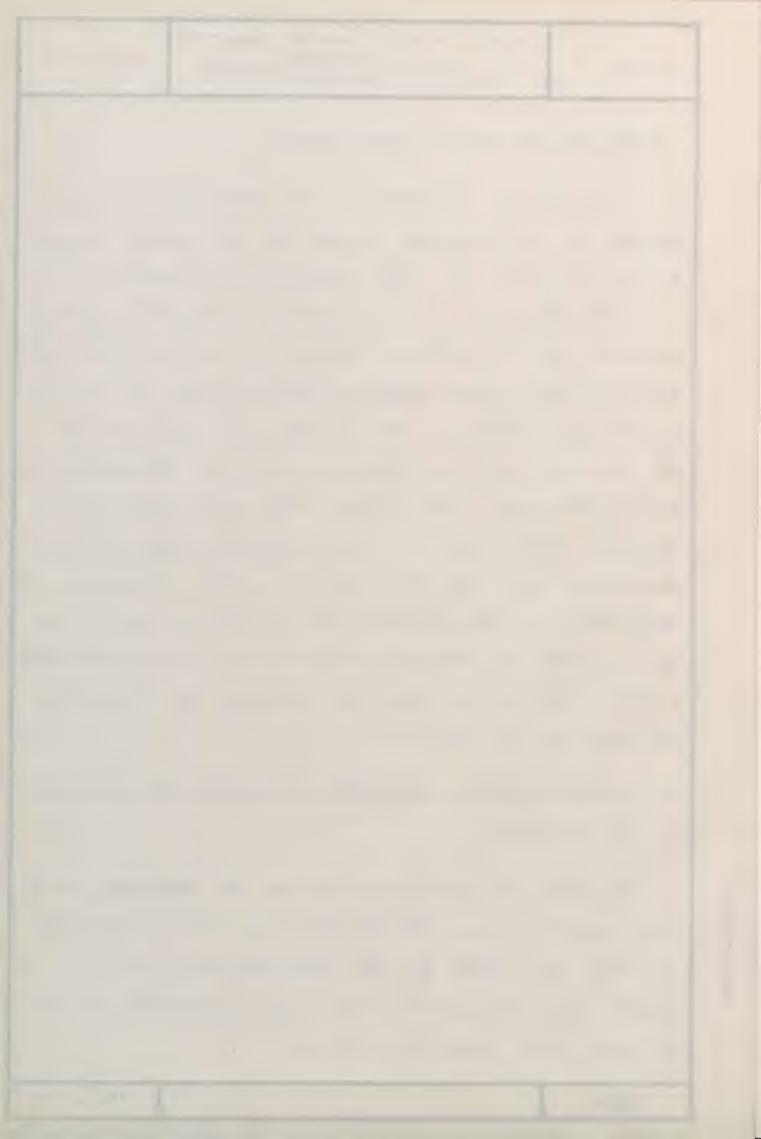


terrección de un dodecaedro regular con su icosaedro conjugado con respecto a los puntos onedios de sus aristas.

compresto de 12 pentagonos regulares y 20 tarángulos equitateres de tata de ipual longitud en ambos tota inse. La arquelos policidos (30 en total) son todos ignales y en cada uno de ellos concurren dos caras pentagonales y dos trianquelares en forma alternada, este policido entra en el grupo de los llamados "tagandames", cuyo estudio y representación desarrollamos en las lámimas 33 a 48. Corresponde al designado por "Arquime diano II" (lámima 36), donde se detalla el calculo analítico de sus principales magmitudos, algumas de ellas de aplicación en el policidos estidiado en esta lámima.

d = singuels restitues del diedro famado por as como serano.

El diedro &, formado por una cara del dodecaedro con la cara secante contigna del iciracdro conjugado a cara pir el ventice al clicto 93.5 del hoquinadiano IV an de ma se micho, y por conseguent de ignal maquitura an est; su valor pera pues: (ver lamina)



Toja : 3

× =

[1]

S = Area lateral en función de l20

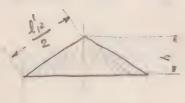
La superficie lateral esta compuesta:

- 1) de 13 pramides Ps, cuyas caras taterales con 5 tarionquelos equilateros de lado igual a loso, y
- 2) De 20 piramides B, engas caras laterales son 3 trianques inósceles de base ignal a les glads contiques a la base (ignales entre se), ignales a l'iz

El a ca lateral de las 12 piramides Po, sera pres

$$S_1 = 12 \times 5 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{\ell_{20}}{2}\right)^2 = \frac{15\sqrt{3}}{4} \ell_{20}^2 \quad (comp.)$$

Para el calculo del area latoral de B, determinemos previamente la altura de sus casas (ver liquea), en la



que (ver ban. 17, formula 181)

$$\frac{\ell'_{12}}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \ell_{20} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \ell_{20}$$

de doude

$$h = \sqrt{\left(\frac{l_R'}{2}\right)^2 - \left(\frac{l_{20}}{4}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5-1}}{4}l_{20}\right)^2 - \frac{1}{16}l_{20}^2} = \frac{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{4}l_{20}$$

El desarrollo de este calculo es el signiente:

$$h = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}l_{20}\right)^{2} - \frac{1}{16}l_{20}^{2}} = \sqrt{\frac{5+1-2\sqrt{5}}{16}} - \frac{1}{16} \times l_{20} = \sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{16}} - \frac{1}{16} \times l_{20}^{2}$$

(C)C

-9-4-52

UNE A4 210 X 29



$$= \sqrt{\frac{6 - 2\sqrt{5} - 1}{16}} \quad ?_{20} = \sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{4}} \quad ?_{20}$$

il avon lateral de las 20 peramites P3, cerà pues

$$S_2 = 20 \times 3 \times \frac{l_{20}}{2} \times \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{4} \right) l_{20} = \frac{15\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{4} l_{20}$$

y el área total S,

$$S = S_1 + S_2 = \frac{15\sqrt{3}}{4} l_{20} + \frac{15\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{4} l_{20} = \frac{15\sqrt{3} + 15\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{4} l_{20} = \frac{15\sqrt{5} + 15\sqrt{5}}{4} l_{20} = \frac{15\sqrt{5}}{4} l_{20} = \frac{15\sqrt{5}}{4} l_{20} = \frac{15\sqrt{5} + 15\sqrt{5}}{4} l_{20} = \frac{15\sqrt{5}}{4} l_{20} + \frac{15\sqrt{5}}{4} l_{20} = \frac{15\sqrt{5}}{4} l_{20} = \frac{15\sqrt{5}}{4} l_{20} = \frac{15\sqrt{5}}{4} l_{20} + \frac{15\sqrt{5}}{4} l_{20} = \frac{15\sqrt{5}}{4}$$

$$= \frac{15(\sqrt{3} + \sqrt{5 - 2\sqrt{5}})}{4} \ell_{20} = 9, 2/9725... \ell_{20}^{2}$$
 [2]

S = Area lateral en frencion de le

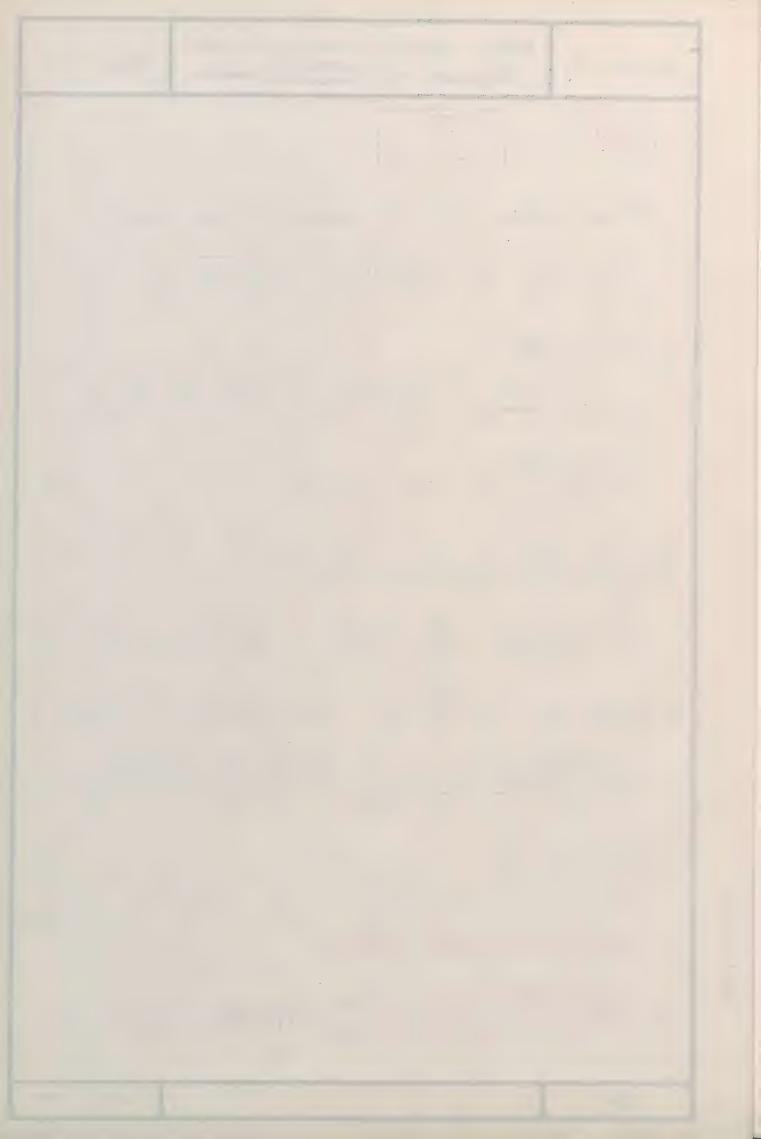
ne deduce que $\ell_{20} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \ell_{12}$, que sustituédo en [2] mos da

$$S = \frac{15(\sqrt{3} + \sqrt{5 - 2\sqrt{5}})}{4} \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2} \ell_{12}\right)^{2} = \frac{15(3\sqrt{3} + \sqrt{15} + \sqrt{16 + 2\sqrt{5}})}{8} \ell_{12} =$$

Desarrollo del calculo anterior:

$$S = \frac{15\left(\sqrt{3} + \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}\right)}{4} \times \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2} l_{12}\right)^{2} = \frac{15}{4}\left(\sqrt{3} + \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}\right) \times \frac{5 + 1 + 2\sqrt{5}}{4} l_{12} =$$

CES.



$$= \frac{i5}{8} \left(\sqrt{3} + \sqrt{5 - 2\sqrt{5}} \right) \left(3 + \sqrt{5} \right) \ell_{12}^2 = \frac{15}{8} \left(3\sqrt{3} + \sqrt{15} + \sqrt{(5 - 2\sqrt{5})(3 + \sqrt{5})^2} \right) \ell_{12}^2 =$$

$$=\frac{15}{8}\left(3\sqrt{3}+\sqrt{15}+\sqrt{(5-2\sqrt{5})(9+5+6\sqrt{5})}\right)\ell_{12}^{2}=\frac{15}{2}\left(3\sqrt{3}+\sqrt{15}+\right)$$

$$+\sqrt{(5-2\sqrt{r})(7+3\sqrt{5}) \cdot 2} \bigg) \bigg|_{12} = \frac{15}{8} \bigg(3\sqrt{3} + \sqrt{15} + \sqrt{2 \cdot (35-14\sqrt{5}+15\sqrt{5}-30)} \bigg) \bigg|_{12} = \frac{15}{8} \bigg(3\sqrt{3} + \sqrt{15} + \sqrt{2 \cdot (35-14\sqrt{5}+15\sqrt{5}-30)} \bigg) \bigg|_{12} = \frac{15}{8} \bigg(3\sqrt{3} + \sqrt{15} + \sqrt{2 \cdot (35-14\sqrt{5}+15\sqrt{5}-30)} \bigg) \bigg|_{12} = \frac{15}{8} \bigg(3\sqrt{3} + \sqrt{15} + \sqrt{2 \cdot (35-14\sqrt{5}+15\sqrt{5}-30)} \bigg) \bigg|_{12} = \frac{15}{8} \bigg(3\sqrt{3} + \sqrt{15} + \sqrt{2 \cdot (35-14\sqrt{5}+15\sqrt{5}-30)} \bigg) \bigg|_{12} = \frac{15}{8} \bigg(3\sqrt{3} + \sqrt{15} + \sqrt{2 \cdot (35-14\sqrt{5}+15\sqrt{5}-30)} \bigg) \bigg|_{12} = \frac{15}{8} \bigg(3\sqrt{3} + \sqrt{15} + \sqrt{2 \cdot (35-14\sqrt{5}+15\sqrt{5}-30)} \bigg) \bigg|_{12} = \frac{15}{8} \bigg(3\sqrt{3} + \sqrt{15} + \sqrt{2 \cdot (35-14\sqrt{5}+15\sqrt{5}-30)} \bigg) \bigg|_{12} = \frac{15}{8} \bigg(3\sqrt{3} + \sqrt{15} + \sqrt{2 \cdot (35-14\sqrt{5}+15\sqrt{5}-30)} \bigg) \bigg|_{12} = \frac{15}{8} \bigg(3\sqrt{3} + \sqrt{15} + \sqrt{2 \cdot (35-14\sqrt{5}+15\sqrt{5}-30)} \bigg) \bigg|_{12} = \frac{15}{8} \bigg(3\sqrt{3} + \sqrt{15} + \sqrt{2 \cdot (35-14\sqrt{5}+15\sqrt{5}-30)} \bigg) \bigg|_{12} = \frac{15}{8} \bigg(3\sqrt{3} + \sqrt{15} + \sqrt{2 \cdot (35-14\sqrt{5}+15\sqrt{5}-30)} \bigg) \bigg|_{12} = \frac{15}{8} \bigg(3\sqrt{3} + \sqrt{15} + \sqrt{2 \cdot (35-14\sqrt{5}+15\sqrt{5}-30)} \bigg) \bigg|_{12} = \frac{15}{8} \bigg(3\sqrt{3} + \sqrt{15} + \sqrt{2 \cdot (35-14\sqrt{5}+15\sqrt{5}-30)} \bigg) \bigg|_{12} = \frac{15}{8} \bigg(3\sqrt{3} + \sqrt{15} + \sqrt{2 \cdot (35-14\sqrt{5}+15\sqrt{5}-30)} \bigg) \bigg|_{12} = \frac{15}{8} \bigg(3\sqrt{3} + \sqrt{15} + \sqrt{2 \cdot (35-14\sqrt{5}+15\sqrt{5}-30)} \bigg) \bigg|_{12} = \frac{15}{8} \bigg(3\sqrt{3} + \sqrt{15} + \sqrt{2 \cdot (35-14\sqrt{5}+15\sqrt{5}-30)} \bigg) \bigg|_{12} = \frac{15}{8} \bigg(3\sqrt{3} + \sqrt{15} + \sqrt{2 \cdot (35-14\sqrt{5}+15\sqrt{5}-30)} \bigg) \bigg|_{12} = \frac{15}{8} \bigg(3\sqrt{3} + \sqrt{15} + \sqrt{2 \cdot (35-14\sqrt{5}+15\sqrt{5}-30)} \bigg) \bigg|_{12} = \frac{15}{8} \bigg(3\sqrt{3} + \sqrt{15} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} \bigg) \bigg|_{12} = \frac{15}{8} \bigg(3\sqrt{3} + \sqrt{15} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} \bigg) \bigg|_{12} = \frac{15}{8} \bigg(3\sqrt{3} + \sqrt{15} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} \bigg) \bigg|_{12} = \frac{15}{8} \bigg(3\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} \bigg) \bigg|_{12} = \frac{15}{8} \bigg(3\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} \bigg) \bigg|_{12} = \frac{15}{8} \bigg(3\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} \bigg) \bigg|_{12} = \frac{15}{8} \bigg(3\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} \bigg) \bigg|_{12} = \frac{15}{8} \bigg(3\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} \bigg) \bigg|_{12} = \frac{15}{8} \bigg(3\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} \bigg) \bigg|_{12} = \frac{15}{8} \bigg(3\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} \bigg)$$

$$=\frac{15}{8}\left(3\sqrt{3}+\sqrt{15}+\sqrt{2(5+\sqrt{5})}\right)l_{12}^{2}=\frac{15(3\sqrt{3}+\sqrt{15}+\sqrt{10+2\sqrt{5}})}{8}l_{12}^{2}$$

V = Volumen en función de \$20

El volumen total de este poliedros ae puede ottener como suma de volumenes de uno de los poliedros aegulares q de las piramides comptementarias formadas en cada uma de las caras del primero por la intersección de los ángulos sólidos del otro.

1) Considerando como primer sumando el volumen del dodecardio, este será (ver lam. 4, form. 41):

form. 181)

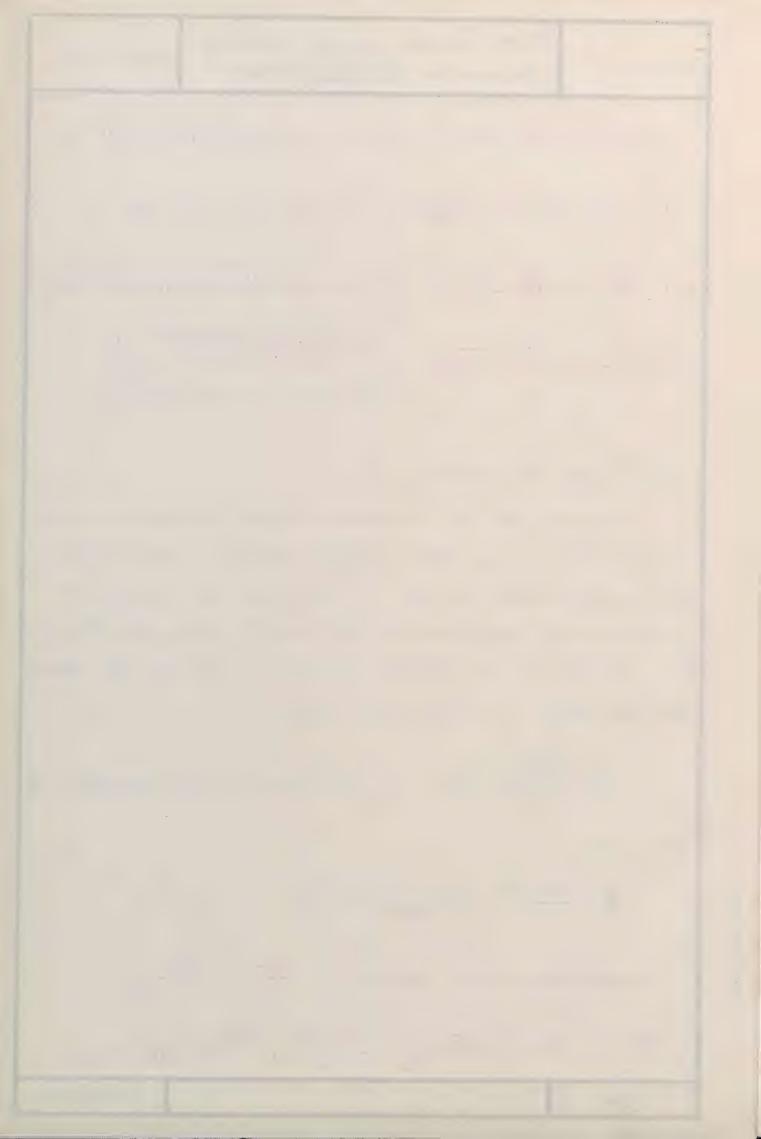
$$V_{12} = \frac{7\sqrt{5} + 15}{4} \times \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \ell_{20}\right)^3 = \frac{5 + \sqrt{5}}{4} \ell_{20}$$

Desarrollo del calculo auterior: $V_{12} = \frac{7\sqrt{5} + 15}{4} \cdot \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \ell_{20}\right)^3 =$

$$= \frac{7\sqrt{5} + 15}{4} \times \frac{5\sqrt{5} - 15 + 3\sqrt{5} - 1}{8} \ell_{20} = \frac{7\sqrt{5} + 15}{4} \times \frac{8\sqrt{5} - 16}{8} \ell_{20} =$$

(F)

00 - 4 - 72



$$=\frac{(7\sqrt{5}+15)(\sqrt{5}-2)}{4}\ell_{20}^{3}=\frac{35+15\sqrt{5}-14\sqrt{5}-30}{4}\ell_{20}^{3}=\frac{5+\sqrt{5}}{4}\ell_{20}^{3}$$

2) Las 12 piramides complementarias tienen por base un pentagono regular de lado igual a leo, y las caras laterales formadas por 5 trianguels equilations también de lado teo; el sadio. de la circumferencia circumscrita al pentagons de la base, se obtiene de la formula de geometrica métrica

en la que desperando h. y aust tregues de por 2, mos dara

$$R = \frac{2 l_s}{\sqrt{10 - 2 \sqrt{5}}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}} l_{20}$$

Desarrollo del calculo auterior: $R = \frac{2 l_r}{\sqrt{10-2 \sqrt{r}}} = \sqrt{\frac{4}{10-2 \sqrt{r}}} l_s =$

$$=\sqrt{\frac{2}{5-\sqrt{5}}} l_{5} = \sqrt{\frac{2(5+\sqrt{5})}{20}} l_{5} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times \frac{l_{20}}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} l_{20}$$

ba altura h de una de las piramides anteriores, la (sique y concluye este parento en el reverso)

$$h = \sqrt{\left(\frac{l_{20}}{2}\right)^2 - R^2} = \sqrt{\left(\frac{l_{10}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}} \, l_{20}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}} \, l_{20}$$

Desarrollo del cálculo auterior: $h = \sqrt{\left(\frac{\ell_{20}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\,\ell_{20}\right)^2} =$

trianquels rectanquels de hipoternesa & pel otro cateto es R (proyección de & sobre el plano del poligono
de una cara del dodecaedro. Por communicate tendremos

 $= \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}} \times \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \quad \ell_{20} = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{5 + \sqrt{5}}{10}} \quad \ell_{20} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}} \quad \ell_{20}$

El area de la base peretagonal, serà (ver geometria métrica)

$$S_5 = \frac{\sqrt{25 + 10 \text{ Vs}}}{4} + \left(\frac{l_{20}}{2}\right)^2$$

y et volumen de las 12 piramides pentagonales

$$V_2 = 12 \times \frac{\sqrt{35 - 10.15}}{4} \times \left(\frac{\ell_{20}}{2}\right)^2 \times \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}} \ell_{20}\right) = \frac{5 + \sqrt{5}}{16} \ell_{20}$$

Desarrollo del calculo anterior:

$$V_2 = 12 \times \frac{\sqrt{25 + 10 \, \text{VF}}}{4} \times \left(\frac{\ell_{20}}{2}\right)^2 \times \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{5 - \text{VF}}{10}} \, \ell_{20}\right) =$$

$$= 3\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} \times \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}} \quad l_{20}^{3} = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{(25 + 10\sqrt{5})(5 - \sqrt{5})}{10}} \quad l_{20}^{3} = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{(25 + 10\sqrt{5})(5 - \sqrt{5})}{10}}$$

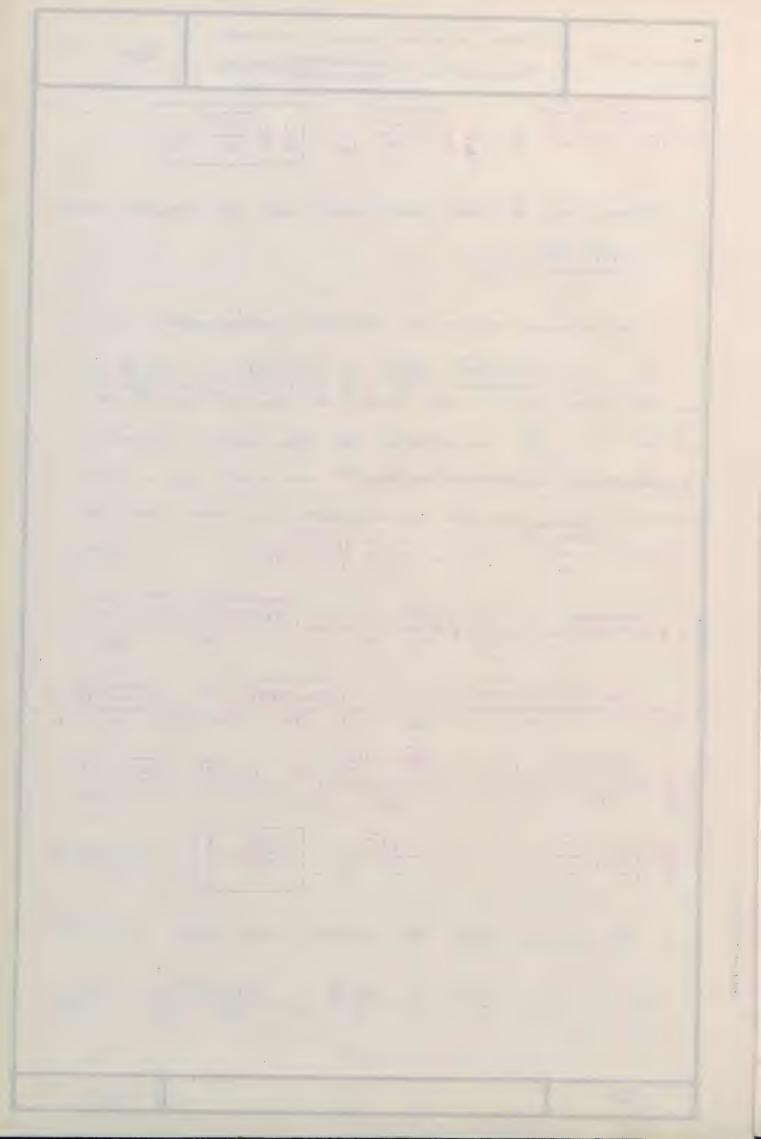
$$= \frac{1}{8} \sqrt{\frac{125 + 50\sqrt{5} - 25\sqrt{5} - 50}{10}} \ell_{20}^{3} = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{75 + 25\sqrt{5}}{10}} \ell_{20}^{3} = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{15 + 5\sqrt{5}}{2}} \ell_{20}^{3} =$$

$$= \frac{1}{8} \times \frac{\sqrt{15+5\sqrt{5}}}{\sqrt{2}} \quad b_{20}^{3} = \frac{1}{8} \times \frac{\sqrt{\frac{25}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}}}{\sqrt{2}} \quad l_{20}^{3} = \frac{1}{8} \left(\sqrt{\frac{27}{4}} + \sqrt{\frac{5}{4}} \right) \quad l_{20}^{3} = \frac{1}{8} \left(\sqrt{\frac{27}{4}} + \sqrt{\frac{5}{4}} \right) \quad l_{20}^{3} = \frac{1}{8} \left(\sqrt{\frac{27}{4}} + \sqrt{\frac{5}{4}} \right) \quad l_{20}^{3} = \frac{1}{8} \left(\sqrt{\frac{27}{4}} + \sqrt{\frac{5}{4}} \right) \quad l_{20}^{3} = \frac{1}{8} \left(\sqrt{\frac{27}{4}} + \sqrt{\frac{5}{4}} \right) \quad l_{20}^{3} = \frac{1}{8} \left(\sqrt{\frac{27}{4}} + \sqrt{\frac{5}{4}} \right) \quad l_{20}^{3} = \frac{1}{8} \left(\sqrt{\frac{27}{4}} + \sqrt{\frac{5}{4}} \right) \quad l_{20}^{3} = \frac{1}{8} \left(\sqrt{\frac{27}{4}} + \sqrt{\frac{5}{4}} \right) \quad l_{20}^{3} = \frac{1}{8} \left(\sqrt{\frac{27}{4}} + \sqrt{\frac{5}{4}} \right) \quad l_{20}^{3} = \frac{1}{8} \left(\sqrt{\frac{27}{4}} + \sqrt{\frac{5}{4}} \right) \quad l_{20}^{3} = \frac{1}{8} \left(\sqrt{\frac{27}{4}} + \sqrt{\frac{5}{4}} \right) \quad l_{20}^{3} = \frac{1}{8} \left(\sqrt{\frac{27}{4}} + \sqrt{\frac{5}{4}} \right) \quad l_{20}^{3} = \frac{1}{8} \left(\sqrt{\frac{27}{4}} + \sqrt{\frac{5}{4}} \right) \quad l_{20}^{3} = \frac{1}{8} \left(\sqrt{\frac{27}{4}} + \sqrt{\frac{5}{4}} \right) \quad l_{20}^{3} = \frac{1}{8} \left(\sqrt{\frac{27}{4}} + \sqrt{\frac{5}{4}} \right) \quad l_{20}^{3} = \frac{1}{8} \left(\sqrt{\frac{27}{4}} + \sqrt{\frac{5}{4}} \right) \quad l_{20}^{3} = \frac{1}{8} \left(\sqrt{\frac{27}{4}} + \sqrt{\frac{5}{4}} \right) \quad l_{20}^{3} = \frac{1}{8} \left(\sqrt{\frac{27}{4}} + \sqrt{\frac{5}{4}} \right) \quad l_{20}^{3} = \frac{1}{8} \left(\sqrt{\frac{27}{4}} + \sqrt{\frac{5}{4}} \right) \quad l_{20}^{3} = \frac{1}{8} \left(\sqrt{\frac{27}{4}} + \sqrt{\frac{5}{4}} \right) \quad l_{20}^{3} = \frac{1}{8} \left(\sqrt{\frac{27}{4}} + \sqrt{\frac{5}{4}} \right) \quad l_{20}^{3} = \frac{1}{8} \left(\sqrt{\frac{27}{4}} + \sqrt{\frac{5}{4}} \right) \quad l_{20}^{3} = \frac{1}{8} \left(\sqrt{\frac{27}{4}} + \sqrt{\frac{5}{4}} \right) \quad l_{20}^{3} = \frac{1}{8} \left(\sqrt{\frac{27}{4}} + \sqrt{\frac{5}{4}} \right) \quad l_{20}^{3} = \frac{1}{8} \left(\sqrt{\frac{27}{4}} + \sqrt{\frac{5}{4}} \right) \quad l_{20}^{3} = \frac{1}{8} \left(\sqrt{\frac{27}{4}} + \sqrt{\frac{5}{4}} \right) \quad l_{20}^{3} = \frac{1}{8} \left(\sqrt{\frac{27}{4}} + \sqrt{\frac{5}{4}} \right) \quad l_{20}^{3} = \frac{1}{8} \left(\sqrt{\frac{27}{4}} + \sqrt{\frac{5}{4}} \right) \quad l_{20}^{3} = \frac{1}{8} \left(\sqrt{\frac{27}{4}} + \sqrt{\frac{5}{4}} \right) \quad l_{20}^{3} = \frac{1}{8} \left(\sqrt{\frac{27}{4}} + \sqrt{\frac{5}{4}} \right) \quad l_{20}^{3} = \frac{1}{8} \left(\sqrt{\frac{27}{4}} + \sqrt{\frac{5}{4}} \right) \quad l_{20}^{3} = \frac{1}{8} \left(\sqrt{\frac{27}{4}} + \sqrt{\frac{5}{4}} \right) \quad l_{20}^{3} = \frac{1}{8} \left(\sqrt{\frac{27}{4}} + \sqrt{\frac{5}{4}} \right) \quad l_{20}^{3} = \frac{1}{8} \left(\sqrt{\frac{27}{4}} + \sqrt{\frac{27}{4}} \right) \quad l_{20}^{3} = \frac{1}{8} \left(\sqrt{\frac{27}{4}} + \sqrt{\frac{27}{4}} \right) \quad l_{20}^{3} = \frac{1}{8} \left(\sqrt{\frac{27}{4}} + \sqrt{\frac{27}{4}} \right) \quad l_{$$

$$=\frac{1}{8} \times \left(\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) l_{20}^{3} = \frac{1}{8} \times \frac{5 + \sqrt{5}}{2} l_{20}^{3} = \frac{5 + \sqrt{5}}{16} l_{20}^{3}$$

il votamen total del policio, iera pues

$$V = V_1 + V_2 = \frac{5 + \sqrt{5}}{4} l_{20}^3 + \frac{5 + \sqrt{5}}{16} l_{20}^3 = \frac{5(5 + \sqrt{5})}{16} l_{20}^3$$
 [4]



blegariamos al mismo resultado considerando como prime sumando el volumen del icosaedro regular y como regun- do anmando las 20 pirámides trianquelares procedentes de lo ainquelos solidos del dodecaedro.

Los calculos justificativos son los signientes:

1) Volumen del icosaedro

2) Volumen de las 20 pirancides trianquelares, cuya las est un trianquelo equilatero de lado los qualtura el cateto de un trianquelo de lado hipternosa la cadio R de la circumferencia circumscrita al trianquelo de la base.

Saliendo que, regime se estudia en Jeometria métrica, el area de un trianquelo equilatero de lado leo, es de

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{\ell_{20}}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{16} \ell_{20}^2$$

y el radio R de la circumferencia circumscrita a di-

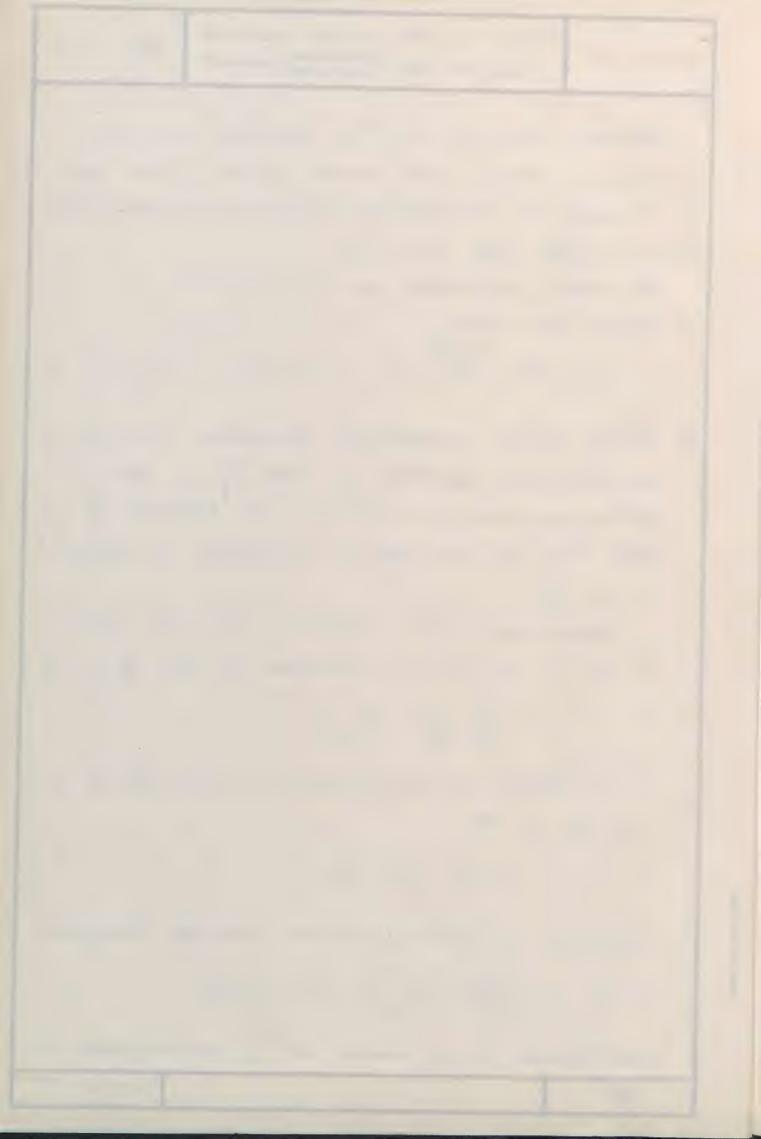
$$R = \frac{\sqrt{3}}{3} * \frac{l_{20}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6} l_{20}$$

calcularemos la altura 1 de una piramide trianquelas

$$h = \sqrt{\left(\frac{l_R}{2}\right)^2 - \left(\frac{15}{6} l_{20}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} l_{12}^2 - \frac{1}{12} l_{20}^2}$$

of sustaturgento la la consien de la los lan 17, tom. 181)

UNE A4 210 X 29



Ayin a ?

lendrene. qui

$$h = \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \ell_{20} \right)^2 - \frac{1}{12} \ell_{20}^2} = \frac{3 - \sqrt{5}}{4\sqrt{3}} \ell_{20}$$

resarrollo del calculo auterior: $h = \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} l_{20}\right)^2 - \frac{1}{12} l_{20}^2}$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 l_{20}^2 - \frac{1}{3} l_{20}^2} = \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{3}} \cdot l_{20} =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3 \cdot \sqrt{5}}{2} - \frac{1}{3}} \quad l_{20} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{9 - 3\sqrt{5} - 2}{6}} \quad l_{20} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{7 - 3\sqrt{5}}{6}} \quad l_{20} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{7 -$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{7-3\sqrt{5}}}{\sqrt{6}} l_{20} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{\frac{9}{2}} - \sqrt{\frac{5}{2}}}{\sqrt{6}} l_{20} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{9}{12}} - \sqrt{\frac{5}{12}} \right) l_{20} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{9}{12}} - \sqrt{\frac{9}{12}} \right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}\right)\ell_{20}=\frac{1}{2}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}\right)\ell_{20}=\frac{3-\sqrt{5}}{4\sqrt{3}}\ell_{20}$$

El volumen 1/2 de las 20 piramides, valdra pues

$$V_2 = 20 \times \frac{\sqrt{3}}{16} l_{20}^2 \times \frac{1}{3} \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{4 \sqrt{3}} l_{20} \right) = \frac{20 \times \sqrt{3} \times (3 - \sqrt{5})}{16 \times 3 \times 4 \sqrt{3}} l_{20}^3 = \frac{5(3 - \sqrt{5})}{48} l_{20}^3$$

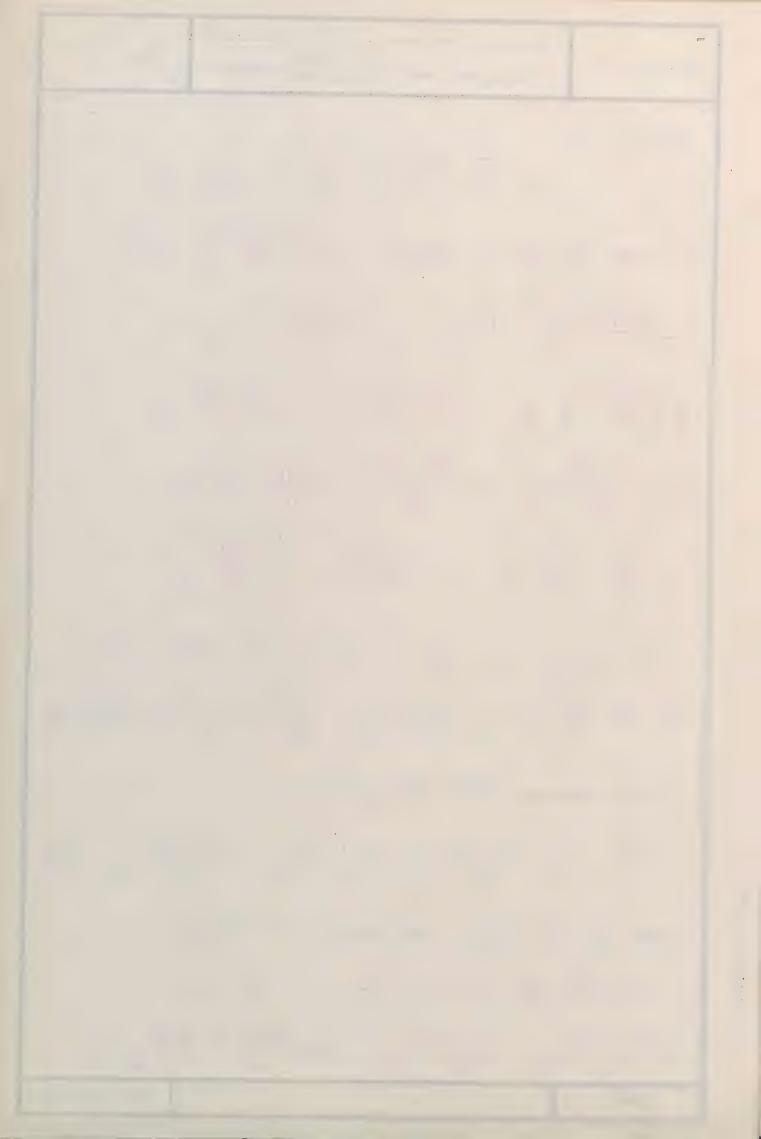
I el volumen total del poliedro

$$V = V_{20} + V_{2} = \frac{15 + 5\sqrt{5}}{12} l_{20}^{3} + \frac{5(3 - \sqrt{5})}{48} l_{20}^{3} = \frac{5(5 + \sqrt{5})}{16} l_{20}^{3}$$
 [4]

iqual al contrado anteriormente atenido.

Desarrollo del calculo anterior: V = V20 + V2 =

$$= \frac{15 + 5\sqrt{5}}{12} l_{20}^{3} + \frac{5(3 - \sqrt{5})}{48} l_{20}^{3} = \frac{60 + 20\sqrt{5} + 15 - 5\sqrt{5}}{48} l_{20}^{3} =$$



$$= \frac{75 + 15\sqrt{5}}{48} l_{20}^{3} = \frac{25 + 5\sqrt{5}}{16} l_{20}^{3} = \frac{5(5 + \sqrt{5})}{16} l_{20}^{3}$$

V = Polence en función de 1/2

sustituyendo este valor en [4], tendremos:

$$V = \frac{5(5+1/5)}{16} l_{20}^3 = \frac{5(5+1/5)}{16} \left(\frac{1/5+1}{2} l_{12}\right)^3 = \frac{5\cdot(15+71/5)}{16} l_{12}^3$$

Desarrollo del catendo anterior
$$V = \frac{5(5+\sqrt{5})}{16} \times \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}l_2\right)^3 =$$

$$= \frac{5(5+\sqrt{5})}{16} \times \frac{5\sqrt{5}+15+3\sqrt{5}+1}{8} \ell_{12}^{3} = \frac{5(5+\sqrt{5})}{16} \times \frac{16+8\sqrt{5}}{8} \ell_{12}^{3} =$$

$$= \frac{5(5+\sqrt{5})}{16} \times (2+\sqrt{5}) \ell_{2}^{3} = \frac{5(10+2\sqrt{5}+5\sqrt{5}+5)}{16} \ell_{12}^{3} = \frac{5(15+7\sqrt{5})}{16} \ell_{12}^{3}$$

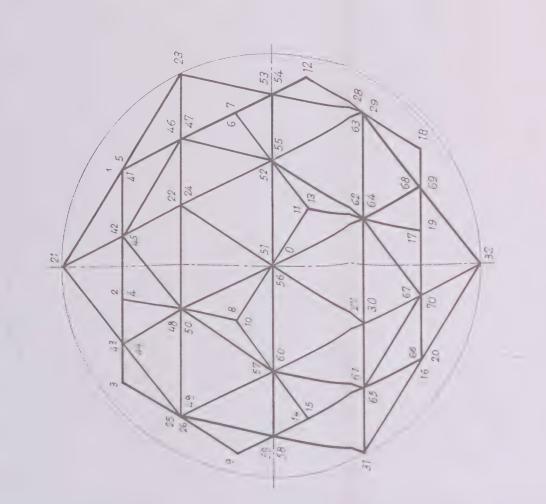
Resumen de cesultado

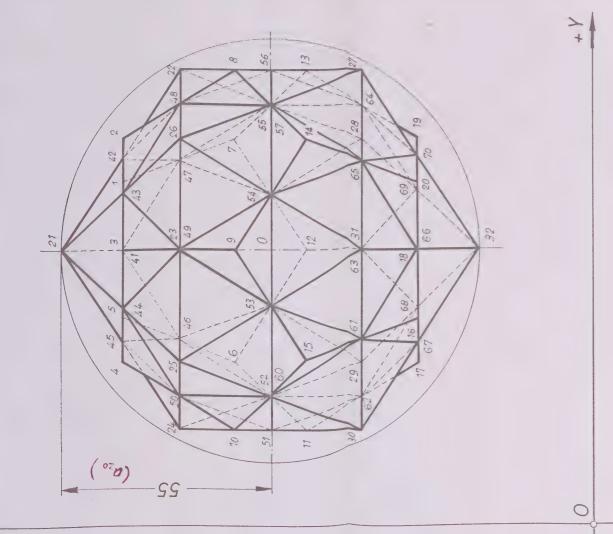
CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
X		:97
S	$\frac{15(\sqrt{3}+\sqrt{5-2\sqrt{3}})}{4}l_{20}^{2}$	9, 21 97 25 20 198
	15(3 V3+ V15 + V10+2 V5) 2 8 /22	24, 13 75 53 3 199
V	5 (5 + 15)	2. 26 12 71 (30 200
	5 (15+715) 1 ₁₂	9, 57 88 99 (3 201



Z+





ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el poliedro obtenido por la intersección de los dos poliedros conjugados estudiados en las láminas 16 y 17.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

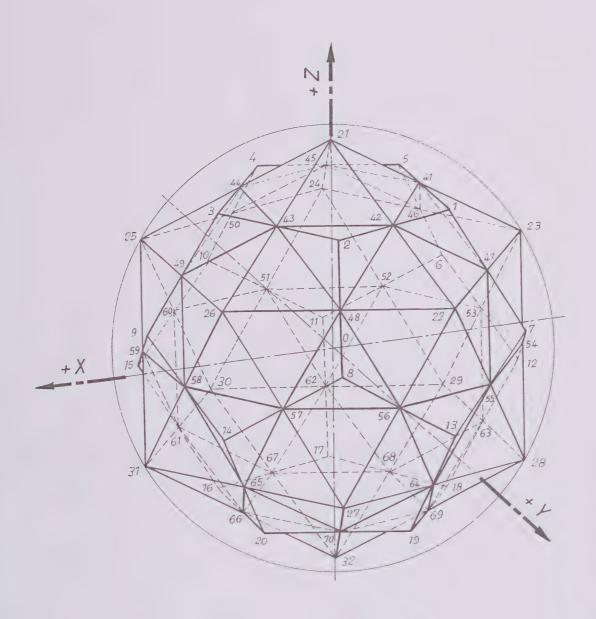
NUMERACIÓN DE VÉRTICES

1+

Escuela	(firma)			regulares convexos conjug
Califi-	cación			res
Entregada			•	regula
Propuesta De entrega Entregada Califi-				Poliedros
Propuesta				Polie
	Fecha:	Alumno:	Escala	1:1

19ados Lámina 18 Curso 19 - 19







10

ENUNCIADO

les permes I. II , III. el policier que la ma el mucleo l'octardro regular) o solido comun, en la intersercicio de la des tetrasedros regulares seguinas seguinas estudinos: en la samuel 12.
Libujar en la mata 131 y a maria 1.1

14 = 29.8 mm

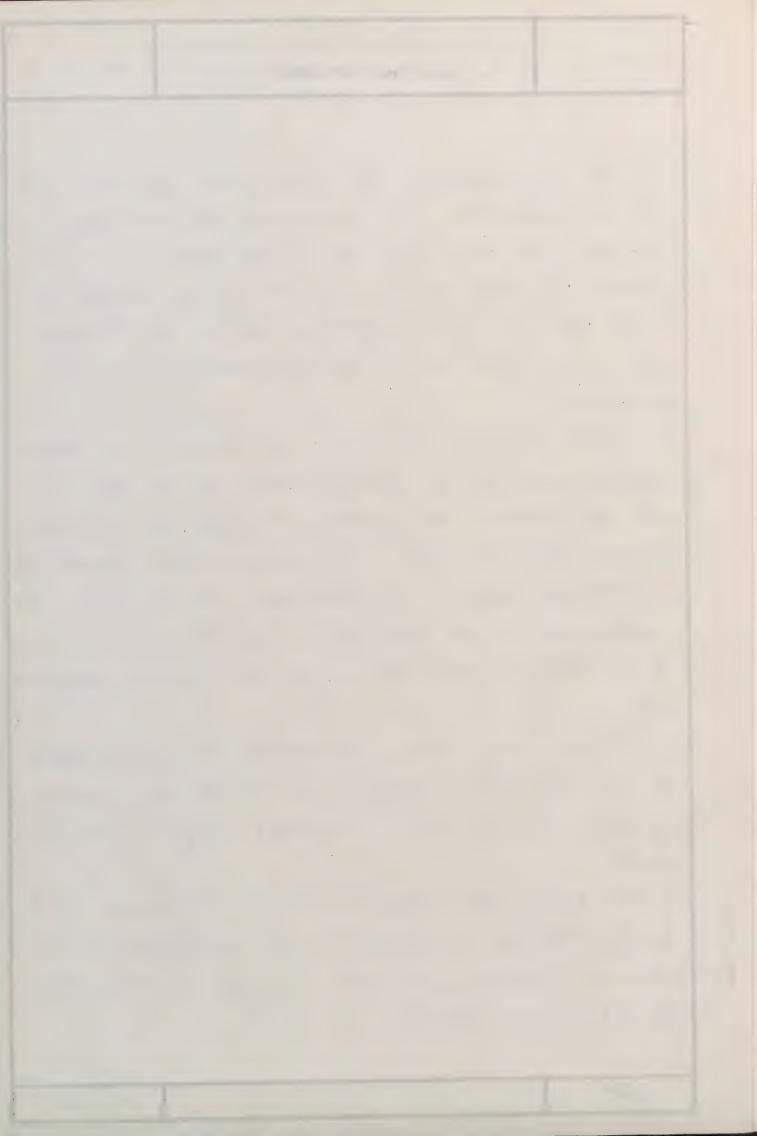


Para la cepresentación del priedro pedido, tomaremos como base el representado en la lámina 12, del enal neprimiremos como las partes no comunes del tetraedro dado q de en conjugado. El solido comin a ambos es un octaedro requiar de lade 14 metad del tado de la tracadora, cuyos vertices estan en los puentos medios de las aristas de ambos.

Como ya heurs estudiado en la lámina 3 el octaedro accular, omitemos el estudio analítico de se dinemento en del micleo, que pueden obtenerse de immediato allere do los voleres del madro conegico Linal, los directamente preva la determinación de $l_0 = \frac{l_4}{2}$, o hou sustituyendo en las foramelas 21 al 28 el valor de l_0 en función del lado l_0 de los tetrasdos conequesos dos.

En este sillimo caso, y conservando la normendature de las magnitudes estudiadas en la lamina 3, dansos al final de este estudio el cuadro sinoptico correspon-

ba poricion del octaedes micho en la lamina 19, que da alterada con respecto a la que figura en la lamina 3, terriendo en aquella una cara parabla a I 2 la contigna perpendicular a I.

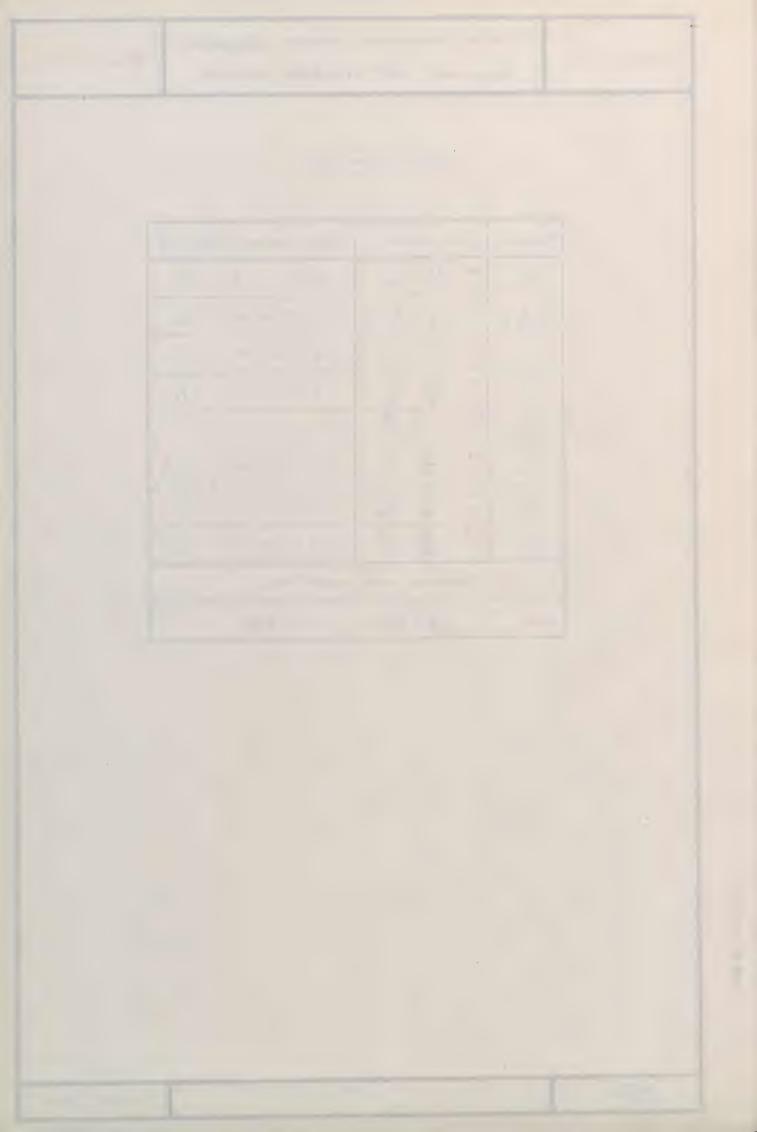


Con en all TETRASORO REGULAR

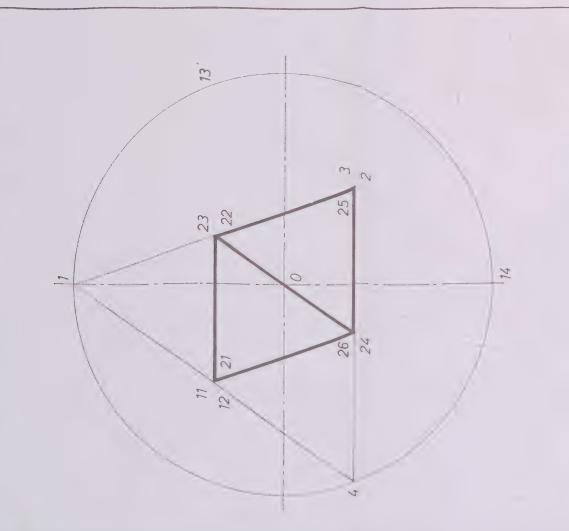
1642 at 3

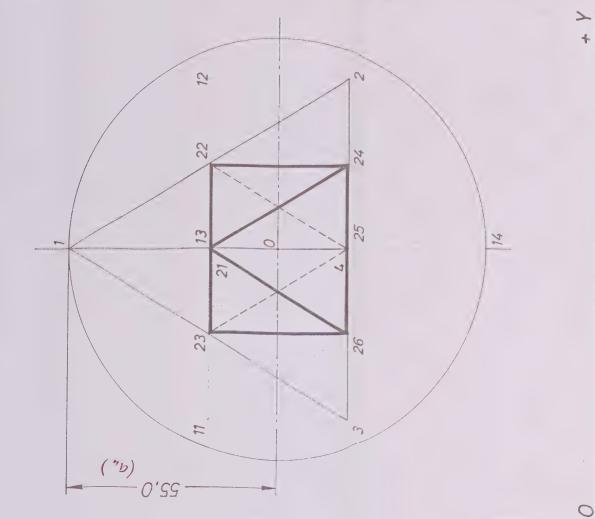
CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
08	202 1/2 /4	0, 35 35 53 14
b ₈	213 1/4 1/4	0. 25 00 00 lu
Cg	204 <u>V6</u> 14	0, 20 41 24 \(\ext{\ell}_4
ds	$\frac{205}{6} \sqrt{3}$	0. 28 86 75 14
248	sen $\psi = \frac{\sqrt{6}}{3}$	Stage of the control
kg	2c7 <u>V3</u> 14	0, 14 43 38 {4
S8	208 <u>V3</u> 2 ²	0, 86 60 25 \(\ell_4^2 \)
V8	209 <u>V2</u> 24	0, 05 89 26 & 3
	Relaciones entre	magnitudes
2/0	de = 2 ke	l ₈ = 2 b ₈



Z +



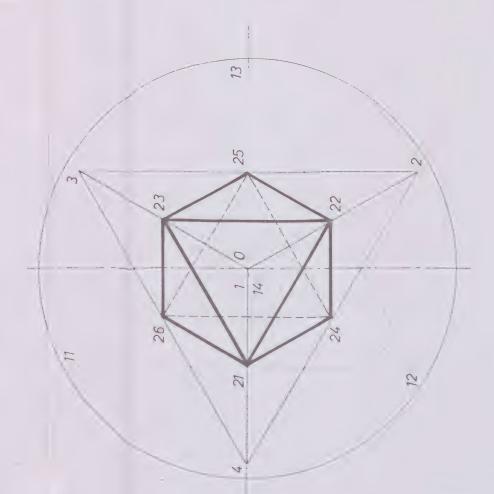


ENUNCIADO

 \times

de los dos poliedros con-(octae-Representar por el método gráficoo sólido común en la analítico, en los planos I II y III, el jugados (tetraedros regulares) estupoliedro que forma el núcleo diados en la lámina 12. dro regular) intersección

65-Q Dibujar en formato A3v y cala 1:1.



NUMERACIÓN DE VÉRTICES

14 26 4 d 0 ā Núcleo (octaedro regular)... Tetraedro conjugado ___ Tetraedro dato.....

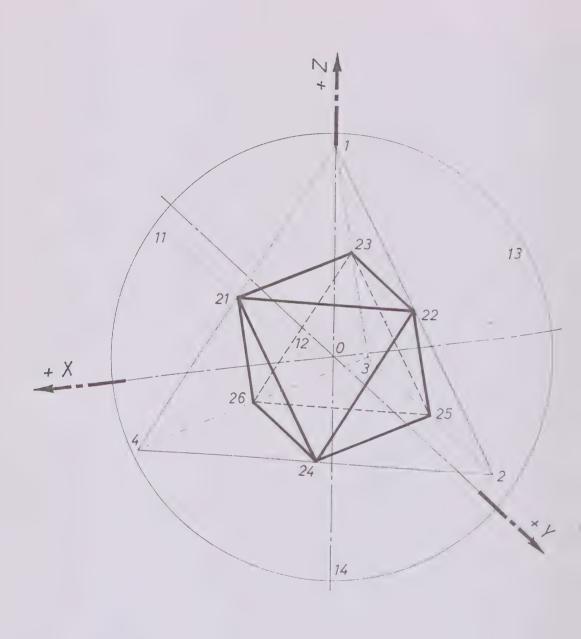
00 9	Poliedros regulares convexos co	res co	regulai	dros	Polie	Escala 1:1
08/10	3					Alumno:
	(firma)	cación (Fecha:
Fections	, i	Califi-	Entregada	Propuesta De entrega Entregada	Propuesta	

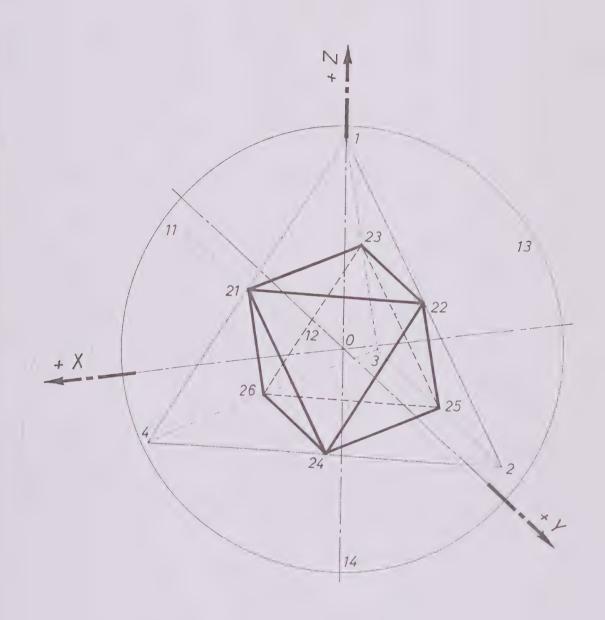
- 19 Curso 19

Lámina 19

conjugados







Poliedros regulares convexos conjugados



B) Centros de aristas

ENVINCIADO

les parates par el meints majores municipales de forma el micleo (arquimediano II) o solido comin, en la santerescerio del madelos o octardos aprimes unejugados estrutuados en la dámina 15.

Libergas en formato 434 a escala 1:1.

DATOS = 0 (72, 72, 85) m m $l_{C} = 55.6 m m$ $l_{2}' = 77.8 m$



Fara la cepresentación del poliedro pedido tomaremos como base el representado en la lámina 15, del cual suprimiremos las partes mo comunes de ambos poliedros reciprocamente conjugados.

El sólido comun a ambos, es el poliedro converco decrominado "Sequimediano II" cuyo estudio detallado se ha
efectuado en la támina 35. Los anestas de este poliedro
crícleo son todas iguales y el total de sus caras se compone de 8 trianquelos equilateros y 6 madrados. Lus auquelos poliedros (12 en total) son tedos iguales, y en cada umo de ettos concurren dos caras cuadra das y dos
trianquelares, en forma alternada.

En el madro sinoptico de la mencionada tàmina 35, figuran los valores analíticos de las principales on aquintudes del Aranimo diano III, en función de su lado "l=l_{III}".

Dichos valones pueden aplicanse a este ejercicio, si previamente obtenenos "l_{III}" en función de "l_g" (lado
del cataedro) o de "l₆" (lado del escaedro), que independentimente pueden ser dates de esta representación.
bas relaciones correspondientes se deducen de esta támi-

ma 20, en la que

a) En función del lado "la" del cota do

 $l_{III} = \frac{1}{2} l_{8} = 0.50 00 00... l_{8}$ (211) [1]



b) on "weien tel lado "to" del exactes con un aco

De la limenta 148, tom. 14, en la que

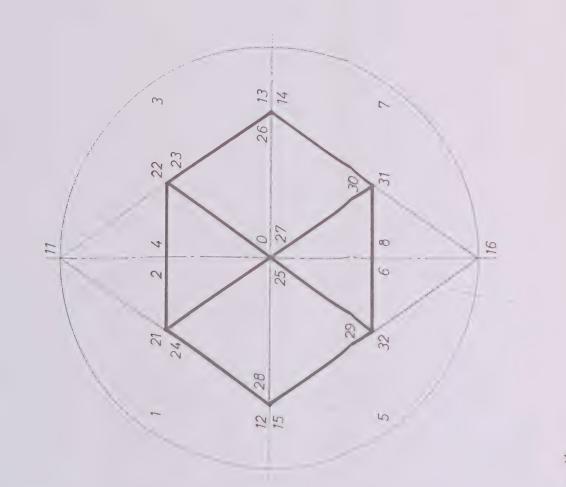
 $\ell_6 = \frac{\sqrt{2}}{2} \ell_8$, as disturce $\ell_8 = \frac{2}{\sqrt{\epsilon}} \ell_{\epsilon} = \sqrt{2} \ell_{\epsilon}$;

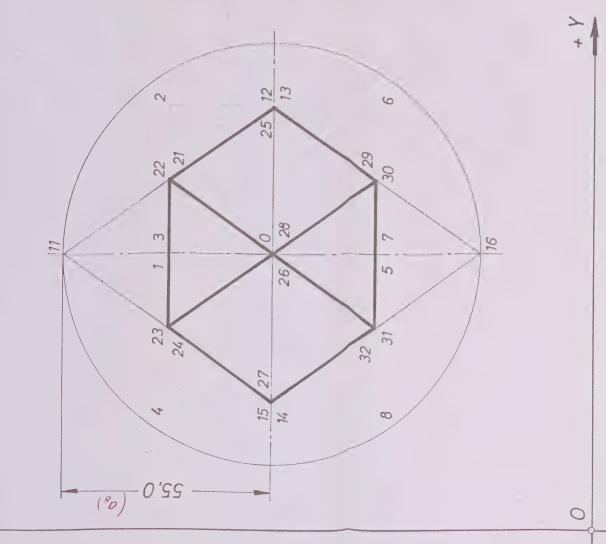
valor que sustituido en [1]. con de

 $\ell_{\underline{m}} = \frac{1}{2} \ell_{g} = \frac{1}{2} \sqrt{2} \ell_{g} = \frac{\sqrt{2}}{2} \ell_{6} = 0.707707...\ell_{6}$ (212) [2]



Z +

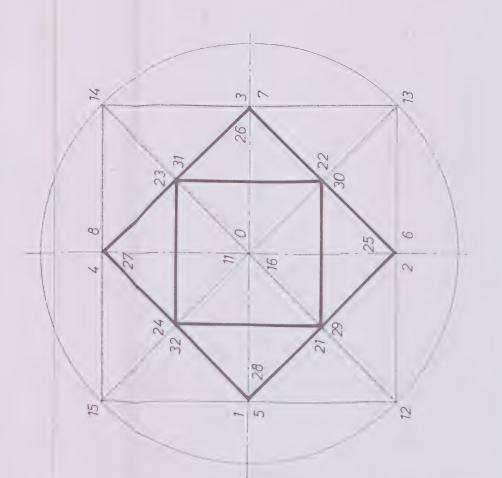




ENUNCIADO

Representar por el método gráficoanalítico, en los planos I, II y III, el poliedro que forma el núcleo (arquien intersección del exaedro y octaedro mediano III) o sólido común, en la regulares conjugados estudiados la lámina 15.

es-Dibujar en formato A3v y cala 1:1.



NUMERACIÓN DE VÉRTICES

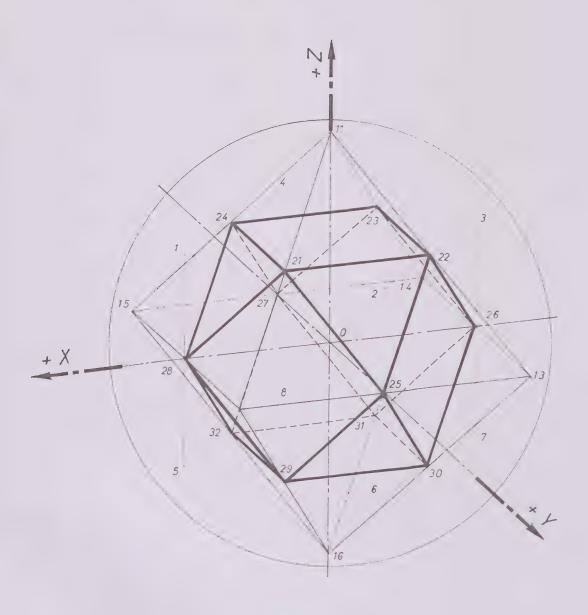
Φ	16	32
۵	a	ما
—		21
4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4	1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2	111)
0	0	(arquimediano
Exaedra	Octaedr	Núcleo

1+

				0
Califi-	cación			-es
Entregada				regulares
Propuesta De entrega Entregada				Poliedros
Propuesta				Polie
	Fecha:	Alumno:	Escala	1.1

	(firma)	Curso	Poliedros regulares convexos conjugados
			00
Califfi	cación		res
Propuesta De entrega Entregada Califi-			regula
De entrega			dros
Propuesta			Polie
	cha:	nno.	cala . 1





Poliedros regulares convexos conjugados



ENUNCIADO

Representes por el seriolo galico-analico, en
los planos I. II q II., el prindo que lo ma
el mucho (regneradores IV) e rollas conseren, en
la interesección del didicación e importos arquelares comprendo estratector en la barria 18.
Dibujar en formate ASV y a escara 1:1

 $DDTOS = 0 \quad (72, 72, 85) \quad ... \quad ... \\ l_{12} = 35.7 \quad ... \quad ... \\ l_{24}' = 57.7 \quad ... \quad ...$



Para la rupresentación del poliedro pedido, Tormaremos como lase el rapresentado en la lámina 18, del enal suprimuremos las partes no comunes de ambos poliedros reciprocamente conjugado.

El sólido comin a ambos es el poliedro converco demensionado " Laquimediano IV" cuyo estudio detalla do
el ha efectuado en la lamina 36, bas aristas de este
poliedro micleo son todas ignales g el total de sus cacas ae compone de 12 pentagomos regulares g 20 trianquebs equilateros de lados de ignal longitud en amtos preganos. Lus angulos poliedros (30 en total) son bdos ignales g en cada uno de ellos concurren dos avas penta-sera a dos traanquelases en torne alternada
con los dos cuadros sinópticos de la mencionada lámima 36, figuran los valores analíticos de las principales

ma 36, figuran los valores analíticos de las principales magnitudes del Arquemo deano N, on funcion de en lado " $l=l_{IV}$ ".

Dichos valores pueden aplicance a este ejercicio, si premamente oblementos "ly" en función "lo" (lado del
icosacdro) o de "l₁₂" (lado del doderacdro), que endepen
dientermente pueden ser dato de esta representación.

Las actaciones correspondientes se deducen de esta támina 21, en la que



a) En función del lado "lo" del icoractro

$$l_{IV} = \frac{1}{2} l_{20} = 0,50 00 00... l_{20}$$
 (213) [1]

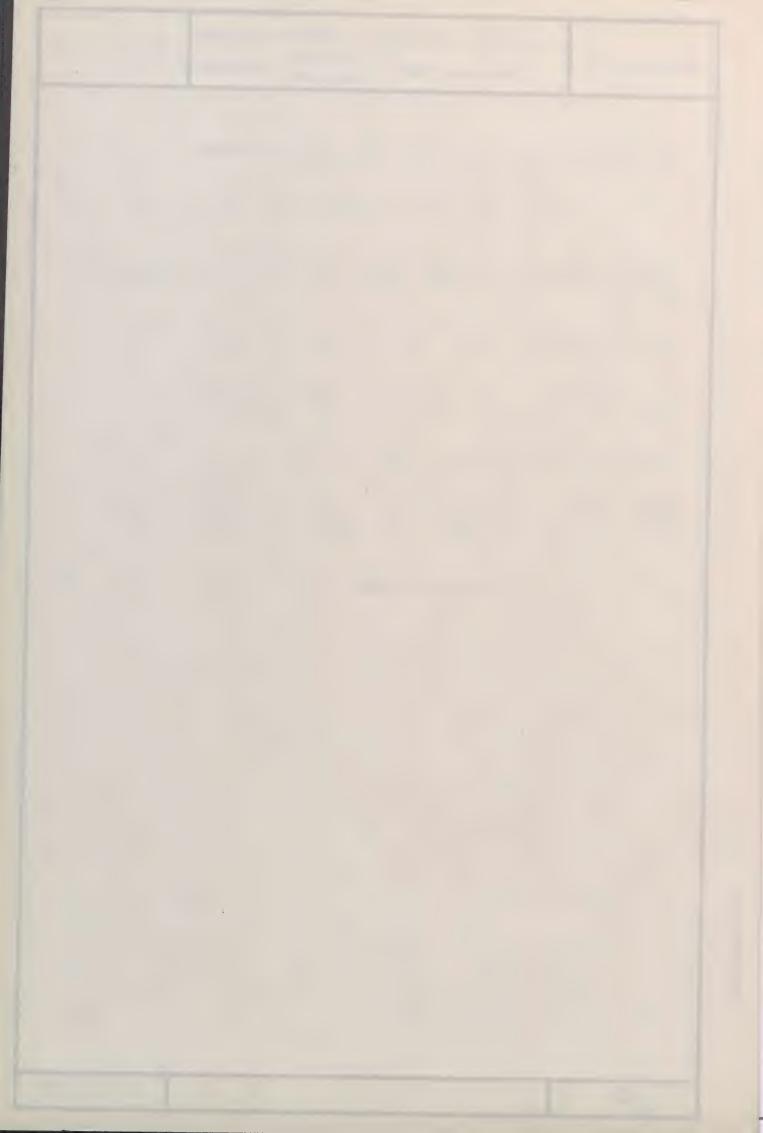
b) En función del beso "la" del dodicardo unipersado

De la firmula 181, lane 17, en la que

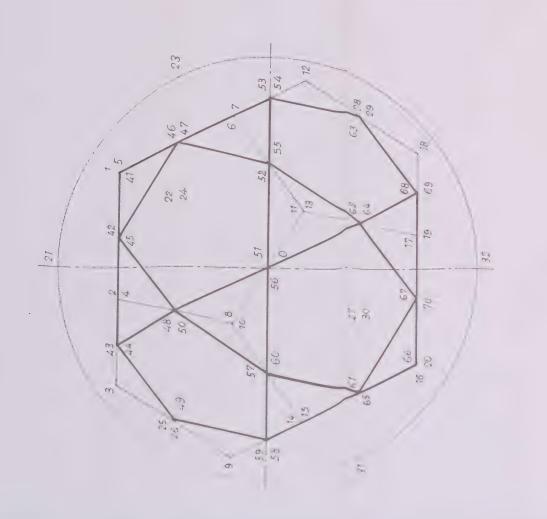
$$l_{12} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} l_{20}$$
, se deduce $l_{20} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} l_{12}$;

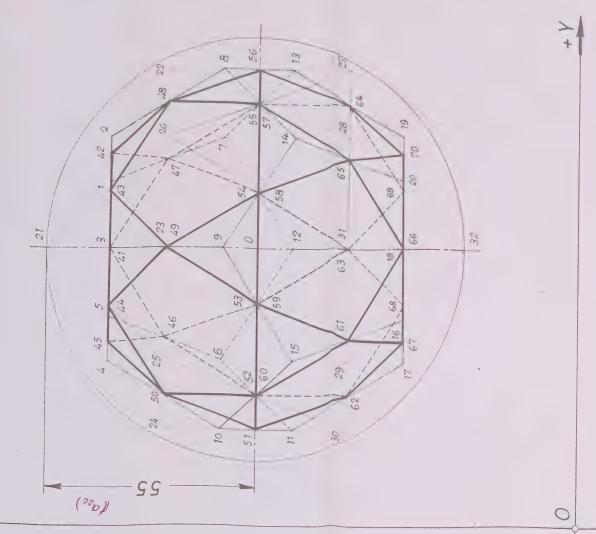
Nala que sustituido en [1], mo da

$$l_{IV} = \frac{1}{2} l_{20} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{5}-1} l_{12} = \frac{1}{\sqrt{5}-1} l_{12} = \frac{1}{\sqrt$$



Z+





NUMERACIÓN DE VÉRTICES

20	32	70
<u></u>	ā	ō
_	21	14
Vodecaedro regular	Icosaedro regular	Núcleo (arquimediano IV)

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III el poliedro que forma el núcleo (arquimediano IV) o sólido común, en la intersección del dodecaedro e icosaedro regulares conjugados estudiados en la lámina 18.

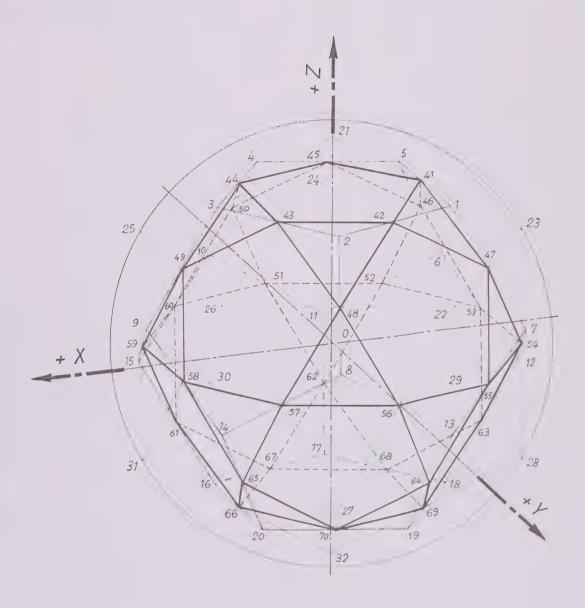
Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

		1+	De entreas
			De
			Propuesta
20	32	70	
۵	ā	0	
_	21	71	

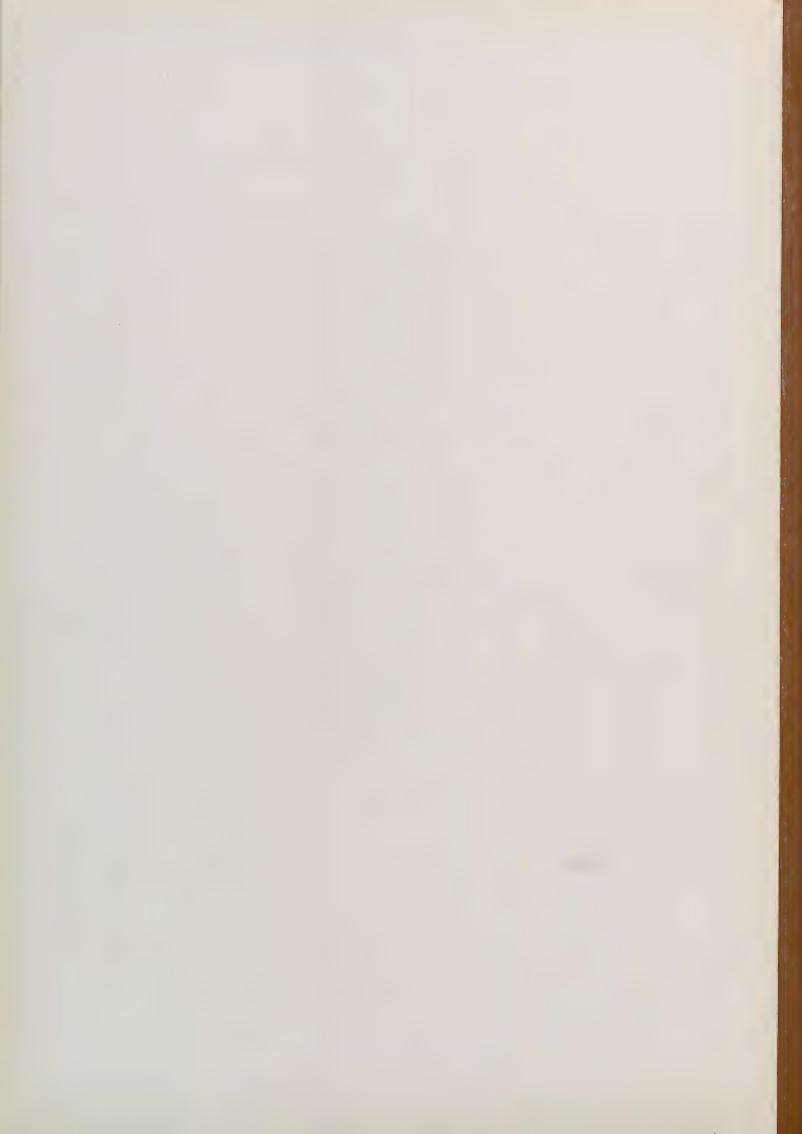
	(firma) Escuela				Poliedros regulares convexos conjugados
				0	
	Califi- cación				res
	Propuesta De entrega Entregada Califi-				regula
	rega				()
	ne en				100
	ta L				iec
	Propues				Pol
		Fecha:	Alumno:	Escala	1:1

Lámina





Poliedros regulares convexos conjugados



ENUNCIADO

terreceion de dos tetraedros requibres accumenta común, escudo los vertices de cada uno de ellos las presenta estas estas de cada uno de ellos las presenta común, escudesde de centro de dicha espera estas estas de los las común, estas de centros de dicha espera estas estas de los las común.

Les considerades del centre de la esfera son:
0/72, 72, 75) mm p el radio de la muma de 55 mm.
Librejar en formato 43 V p a escala 1:1.

 $\frac{DATOS}{a_{\mu}} = a_{\mu}' = FF m m$



CONSIDERACIONES PREVIAS

En las laminas 6 a 10 herrios estudiado los priedros requelares conjugados de los cinco poliedros regulares, obtenidos aquellos al unir los centros de dos caras contigues
de estos.

ton la lanuna II indicamo la posibilidad de deducir los policidos conjugados de los regulares, por otros procesos agentos consequidos en el desarrollo de las láminas II, I3, I4, I6, I7, ha eido el de trasar por los puntos medios de las aristas del policido dado, acota perpendeculares al plano determinado por dichas arestas y el centro del policido dado. El comero proceso que requiriemos en el desarrollo de las láminas 22, 23 y 24 consistirá en considerar la estera circumsente al policido reconar en el dado y la de rue conjugado I', de igual radio y centro (coincidentes). En este represente de circum proyectando los centros de cada cara de P, sobre la esfera común y desde el centro de esta.

temes que es tro tetracedo P' también recontas. For .

tomes andes potendos la esfera comensante comun,

dichos poliedros cerán pues iguales



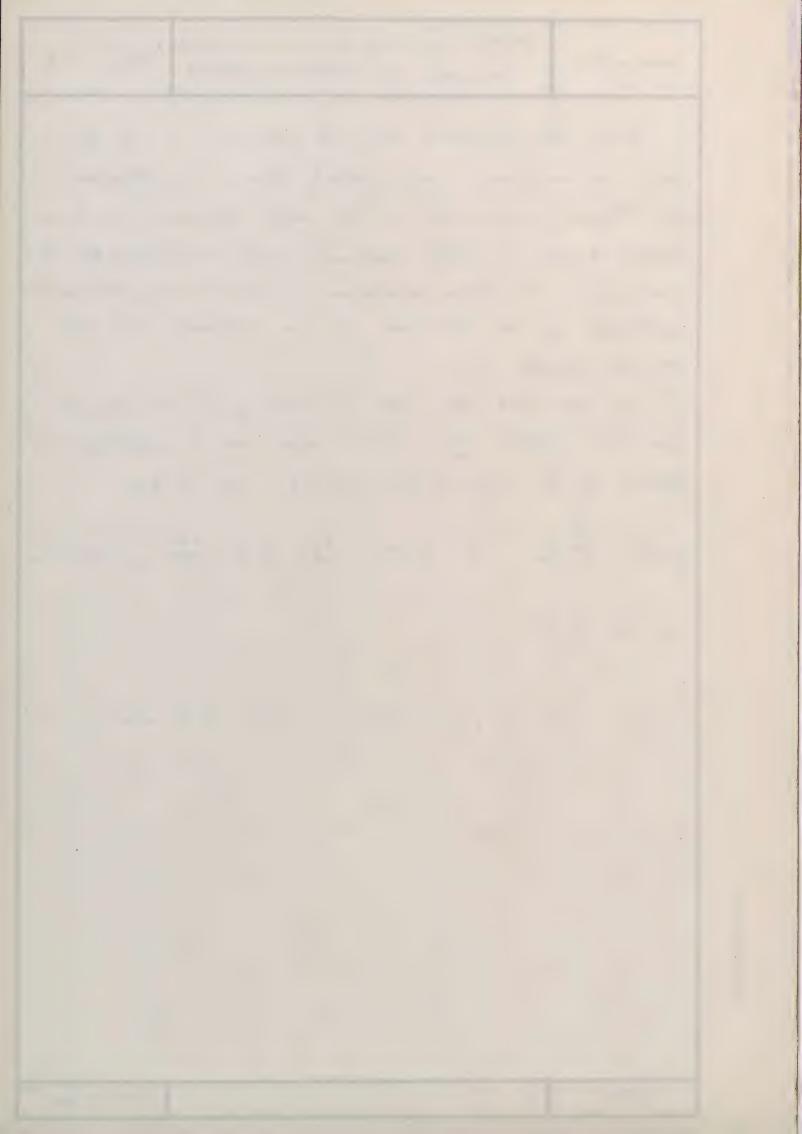
ma II al considerar una distinta forma de obtención del tetracedro conjugado de otro dado, llegamos a la concelusión de que el estudio realizado en la mencionada lamina II, y la representación conjunte del policido realizado en la policido realizado en la mencionada lamina II, y la representación compenta del policido resoltante en la lámina I2, es aplicable al caso
que cos ocupa.

de magnitud des lado l' del conjugado, en funcion del cada de commen para sur la poliedros, es deduce de la formula 126, lam. 11, en la que

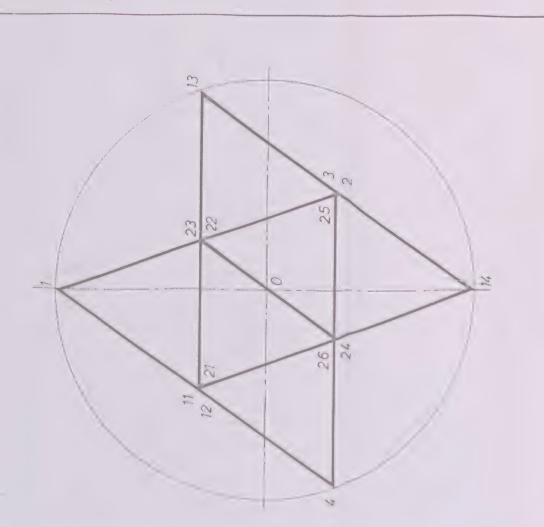
$$a_{4} = a_{4}' = \frac{\sqrt{6}}{4} l_{4}'$$
 de donde $l_{4}' = \frac{4}{\sqrt{6}} a_{4} = \frac{2\sqrt{6}}{3} a_{4} = (2/5)[1]$

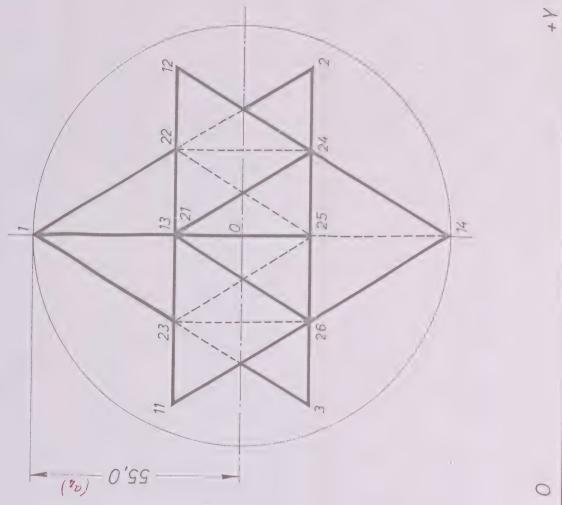
= 1,63 29 93 --- 04

1' = 1,63 24 95 x 55 = 89.8 mm.



Z+

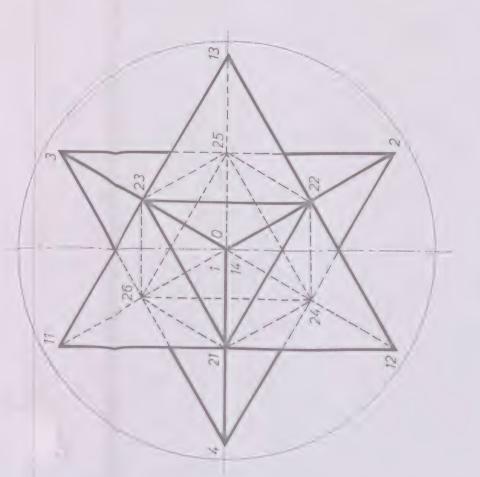




ENUNCIADO

tersección de los dos poliedros conju-III, el poliedro obtenido por la ingados representados en la lámina 11. Díbujar en formato A3v y a es-Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y

cala 1:1.



NUMERACIÓN DE VÉRTICES

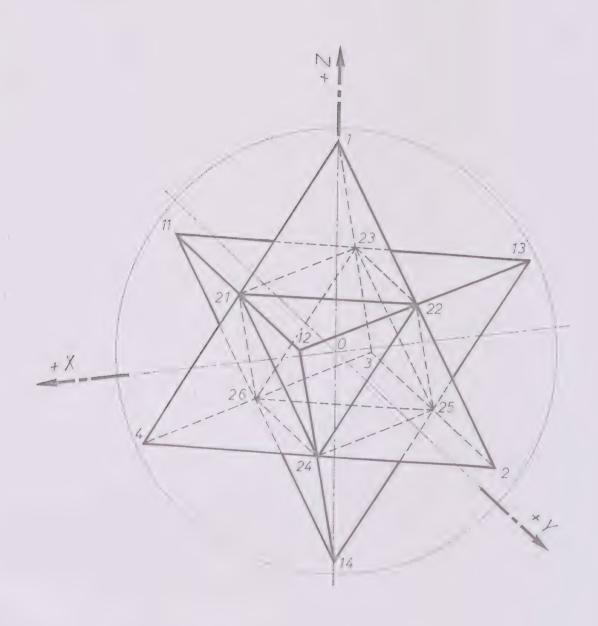
d 4	al 14	al 26
-		21
dato	conjugado	octaedro regular)
Tetraedro	Tetraedro	Núcleo (

1+

(firma)				CONVE
-IIIEO	cación			res
				regulares conve
Callli-				Poliedros
				Polie
	Fecha:	Alumno:	Escala	1.1

Escuela Curso







C) de ignal es lesa circumscrita.

ENLINCIADO

Representar por el mitodo gráfico-analítico, en los obanos I, II q III, el poliedro resultante de la intersección de un exactro o octactro regulares reciprocacrente conjugados q de esfera circumserita común,
niendo los vertices de cato uno de ellos las proyecciones
desde el centro de dicha esfera, q róbre esta, de los
centros de las caras del sino.

La coordinadas del centro de la anima de 55 mm.
L'112, :: 2 de la anima de 55 mm.
Libujer en formato A3V p a escala 1:1.

D1705: O(72, 72, 85) m m $a_6 = a_9 = 55 m m.$



CONSIDERACIONES PREVIAS

Al iniciar en la làmina 6 el estudio j propiedades de los poliedros conjugados de los regulares, nimos que estos conjugados son tambien regulares, correspondiendo al tetrae-dro otro tetraedro; al exaedro el octaedro; al octaedro el caedro; al octaedro el caedro; al dodecaedro el icosaedro j al icosaedro el dodecaedro.

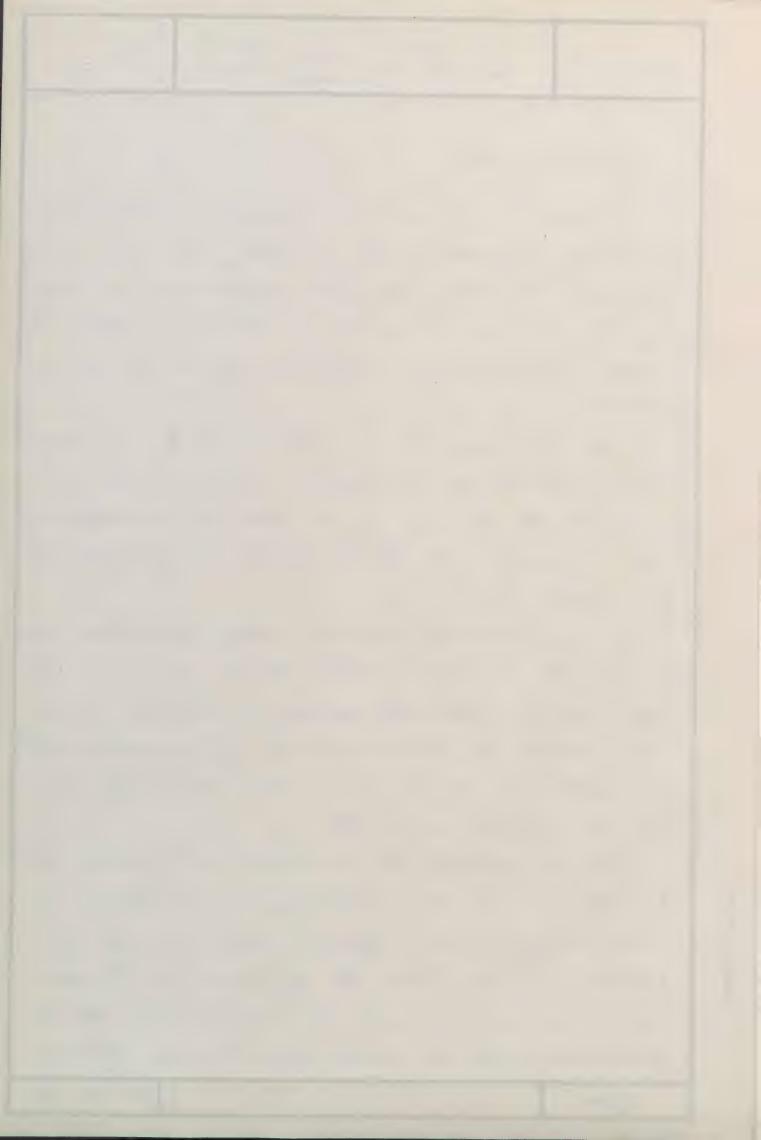
Con ello llegamos a la conclusion de que el exaedro j octaedro son auntuamente conjugados (cada uno
lo es del otro), así como ignal ocurre con el dodecaedro e icrsaedro. El tetraedro regular es conjugado.

si mismo.

Je la ante insumente expuesto a deduce que al estudiar el con ingado de un policido dado. Atenido esquem un procues que mentricio determinado, uno esmos de antempera la sorma constante de diche compaçado, y en queral variable con respecto a sus climen siones, de pendennes del proceso de obtención a plicado.

tells ha quedado de manifecto en el estate de las laminas 6 a 10 y 11-13-14-16-17. La procesa acomiencos de queración aplicados, combeman esta variabilidad, escapación hesta del compagado del Itracción en la lamina 11, cuya ley de formación da lugar a un confugado de igual magantal que el dado.

Co



UNE A4 210 X 29

El proceso requido en el estudio de los potiedros con jugados desareollados en las láminas 22, 23 g 24, de enfera encues orita comin, respondence en la lámina 22 la representación de las láminas 11 g 12. Em las láminas 23 g 24, el potiedro resolutante de la constra intersección del potiedro dado y de en conjugado de semal enfera cincular como dado, es el comismo e independiente del que retorne como dato.

PROCESO GRÁFICO

Proceduremos prevamente a la representación del exactro y octavimo magnesso, incresos en una muma espera de 55 mm. de radio.

Comencemos por el octaedro cequilar, que colocaremos en la pricción representada en la limita ?, significado el proceso gráfico de la criema. El lado lo de este octaedro, será (ver lám. 3, Józm. 21)

$$l_g = \frac{a_g}{\sqrt{\epsilon}} = \frac{55}{0.70 \ 7/07} = 77.8 \ m \ n$$

en su emisma esfera, tendrá una prición en relación con el cota do partición, exactamente econal al quel tiene en la lamiona 2. El lado lo de este escae dro, será (ver lam. 2, form. 11)



Major no 3

$$l_{c} = \frac{a_{c}}{\frac{13}{2}} = \frac{55}{0.866025} = 63.5 \text{ mm}.$$

Renteads el problema de intersección de ambos policaios, re puede obtemos el resultado por aplicación del mitodo de intersección de caras o de aristas cuyo fundamento se studa en la geometria descriptiva.

Esta intersección se reduce a la penehación de los anquelos solidos del estaclas en las casas del conedido que,
por rasones de simetria en la prición celativa de ambos
potudos, son troses senales quadrades. An estados
las proyecciones de los dos poliedos en los planos I q II,
es inmediata la obtención de la muntera intersección.
en ambos planos de las cuales se deduce orner fácilmenta la proyección en II (ignal a la I).

El sólido resultante se compone basicamente de un escaldo nomelar en cuyas caras y contrasas con ellas, se apagen
sers permendes rectas de base cuadrada todas remales. Las
diagoniales de las lary de estes pramides sen perpendicio
lares (o penalelas) a la lados del cuadrado de cada
cara del exaedro.

PROCESO GRAFICO-ANALÍTICO

calcularemo, las signientes magnitude en d'herado, del sadio a de la esfera circumserita comuin:

(30)



le : bado del escaedio

! . bado del octardo

1 = Lado del cuadrado intersección de un anquelo sólido del octaedro con una cara del exaccio.

q = Diagonal del cuadrado anterior

h: Altura de la piramide escterir a una cara del exaedro

S: Imperficie lateral

V = Nohemen.

20 = Augulo rectilines del diedes formado por la interrección de una cara del exaedro con la correspondiente del octaedro la del exae do

ya le hemes de terminado auteriormente; (su valor se de duce de la formula 11, lam. 2).

$$\ell_{G} = \frac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} a$$

bado "l," del octaedio

Igned mente hemos visto que l'aim i forme si

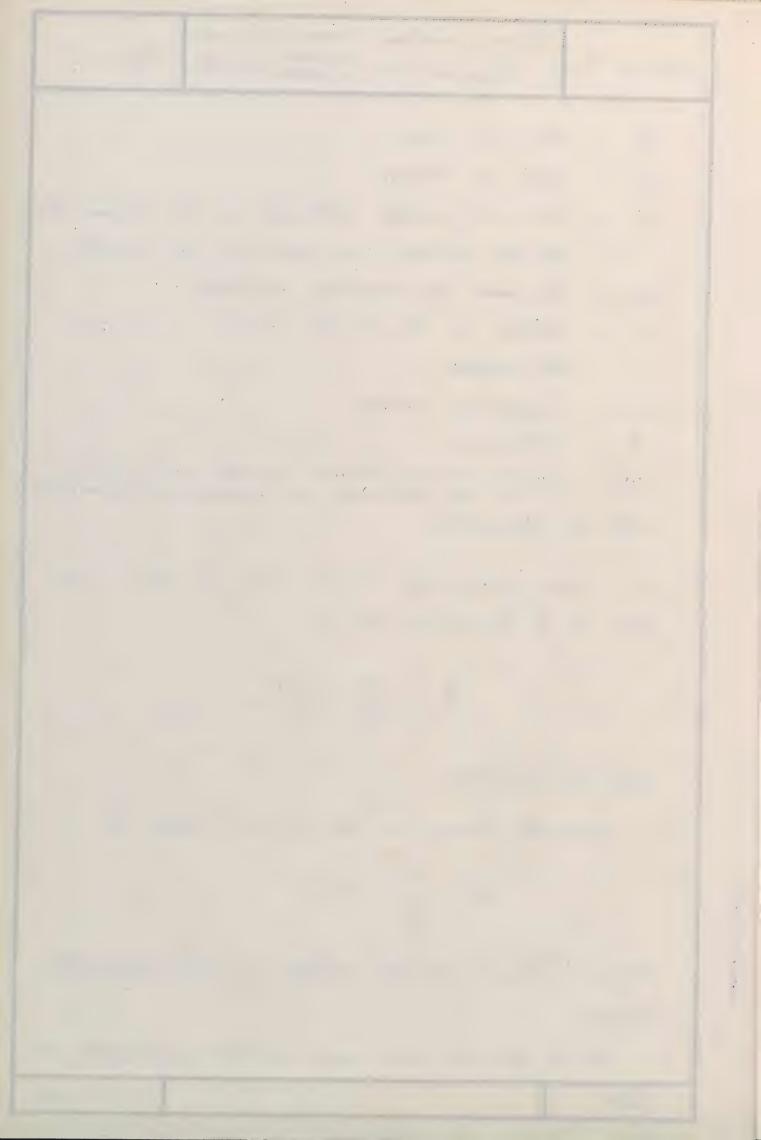
$$l_1 = \frac{a}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} a$$

Altura "h" de la piramide exterior a una cara del exaedro

in la l'anna 33 re puede observas an dieter al-

(30)

14 - 5 - 78



tura es la diservaria entre el socio y de la sefera inscrita y el servelanto $\frac{\ell_0}{2}$ del exaedro, ju lo que

$$h = a - \frac{1}{2} = a - \frac{213}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3} a$$

Lado "4" del cuadrado interrección de un anquis rollido

del citaedes con una cara del exaedis

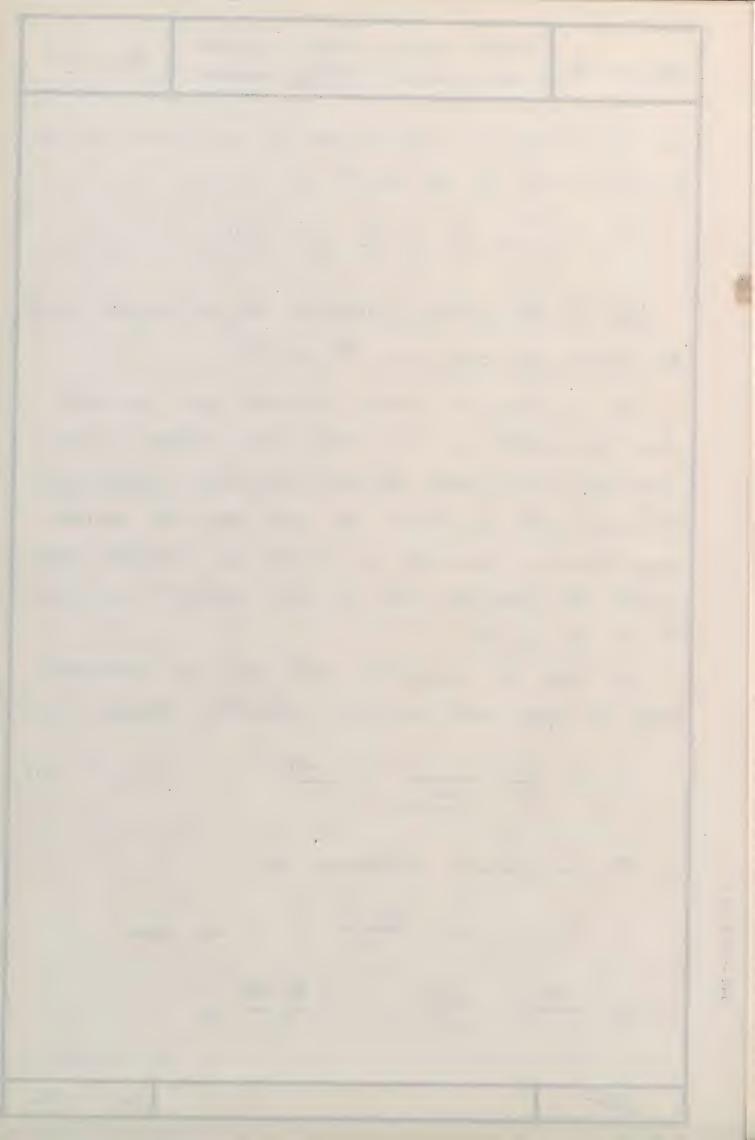
caras concurrentes en un reter del cierto forman una piramide cecta de base cuadrada y altura a. Esta piramide es cortada por una cara del exaedro cuyo plano es paralelo a la base de aquella, produciendo otra piramide cecta de base cuadrada remejante a la primera.

sera la que excista entre sus respectivas alturas, o rea

$$\frac{a}{h} = \frac{a}{3 - \sqrt{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$$

Por consigniente, tendrems que

$$f = \frac{2 l_8}{3 + \sqrt{3}} = \frac{3 \sqrt{2}}{3 + \sqrt{3}} = \frac{3 \sqrt{2} - \sqrt{6}}{3}$$



Nr. 6

Desavrollo del calculo auterior: $m = \frac{2\sqrt{2}}{3+\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3+\sqrt{3}}$

$$=\frac{2\sqrt{2}(3-\sqrt{3})}{6}a=\boxed{\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3}a}$$

Diagonal "9" del madrado anterior

Lu valor sera:
$$g = f \sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{3} \times \sqrt{2} = \frac{6 - 2\sqrt{3}}{3} = \frac{6}{3}$$

Desarrollo del calculo auterior: $d = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{3} \times \sqrt{2} a = \frac{3 \times \sqrt{2} \sqrt{2} - \sqrt{2} \sqrt{6}}{3} = \frac{6 - \sqrt{12}}{3} = \frac{6 - 2\sqrt{3}}{3} =$

Lugarficia lateral S

El área resultante de cada cara del exaedro, cerá

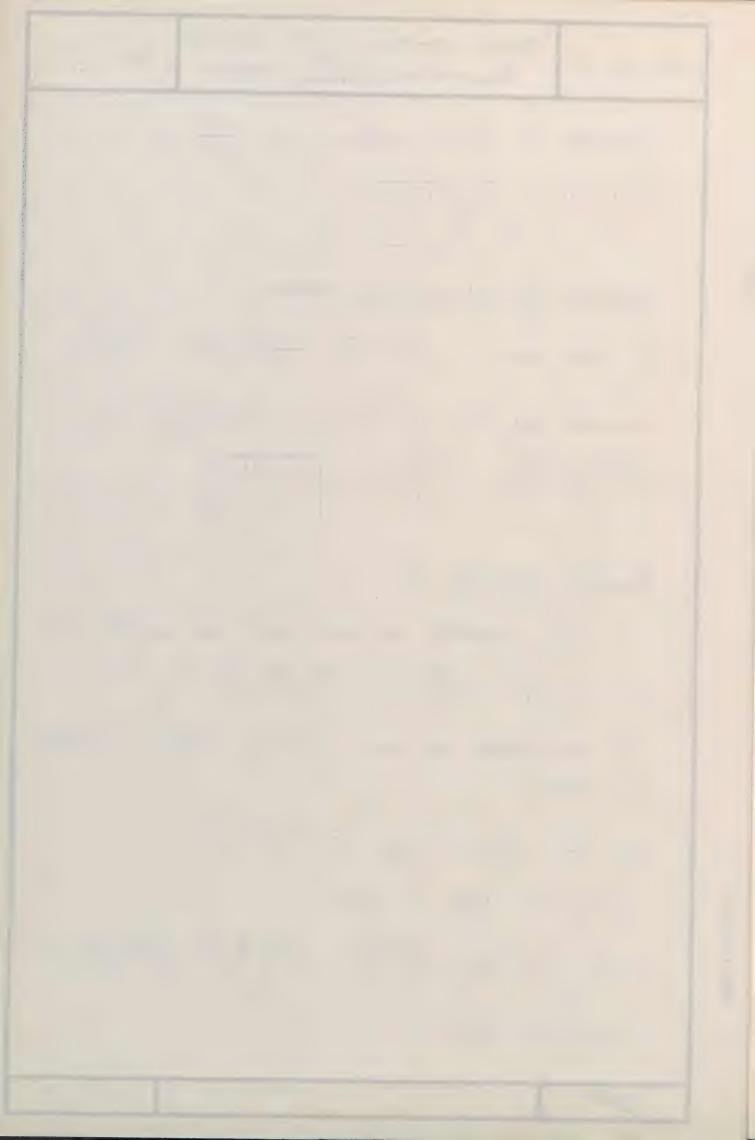
$$S_4 = \frac{1}{6}^2 - f^2 = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}a\right)^2 - \left(\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{3}a\right)^2$$

El ava lateral de cada piramide exterior a didea

$$S_2 = \frac{44}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} = \sqrt{3} \left(\frac{3\sqrt{8} - \sqrt{6}}{3} \right)^2$$

y it are total S, sora:

$$S = 6 \left(S_1 + S_2 \right) = 6 \left[\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} a \right)^2 - \left(\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{3} a \right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{3} a \right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{3} a \right)^2 \right] = 6 \left[\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} a \right)^2 - \left(\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{3} a \right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{3} a \right)^2 \right] = 6 \left[\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} a \right)^2 - \left(\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{3} a \right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{3} a \right)^2 \right] = 6 \left[\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} a \right)^2 - \left(\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{3} a \right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{3} a \right)^2 \right] = 6 \left[\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} a \right)^2 - \left(\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{3} a \right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{3} a \right)^2 \right] = 6 \left[\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} a \right)^2 - \left(\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{3} a \right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{3} a \right)^2 \right] = 6 \left[\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} a \right)^2 - \left(\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{3} a \right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{3} a \right)^2 \right] = 6 \left[\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} a \right)^2 - \left(\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{3} a \right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{3} a \right)^2 \right] = 6 \left[\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} a \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{3} a \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{3$$



Desarrollo del calculo auterior:

$$5 = 6 \times \left[\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} a \right)^2 - \left(\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{3} a \right)^2 + \sqrt{3} \times \left(\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{3} a \right)^2 = 6 \times \left(\frac{12}{9} a^2 - \frac{12}{9} a^2$$

$$-\frac{18+6-6\sqrt{12}}{9}a^2+\sqrt{3}\times\frac{18+6-6\sqrt{12}}{9}a^2\Big)=6\times\Big(\frac{4}{3}-\frac{24-6\sqrt{12}}{9}+$$

$$+\frac{\sqrt{3}*(24-6\sqrt{12})}{9}a^{2}-6*\left(\frac{4}{3}-\frac{24-i2\sqrt{3}}{9}+\frac{24\sqrt{3}-6\sqrt{36}}{9}\right)a^{2}=$$

$$= \left(8 - \frac{6 \cdot (8 - 4\sqrt{3})}{3} + \frac{6 \times (8\sqrt{3} - 2 \times 6)}{3}\right) a^{2} = \left(8 - \left(16 - 8\sqrt{3}\right) + \frac{6 \times (8\sqrt{3} - 2 \times 6)}{3}\right) a^{3}$$

$$+(16\sqrt{3}-24))a^{2}=(8-16+8\sqrt{3}+16\sqrt{3}-24)a^{2}=(24\sqrt{3}-32)a^{2}=$$

Volumen V

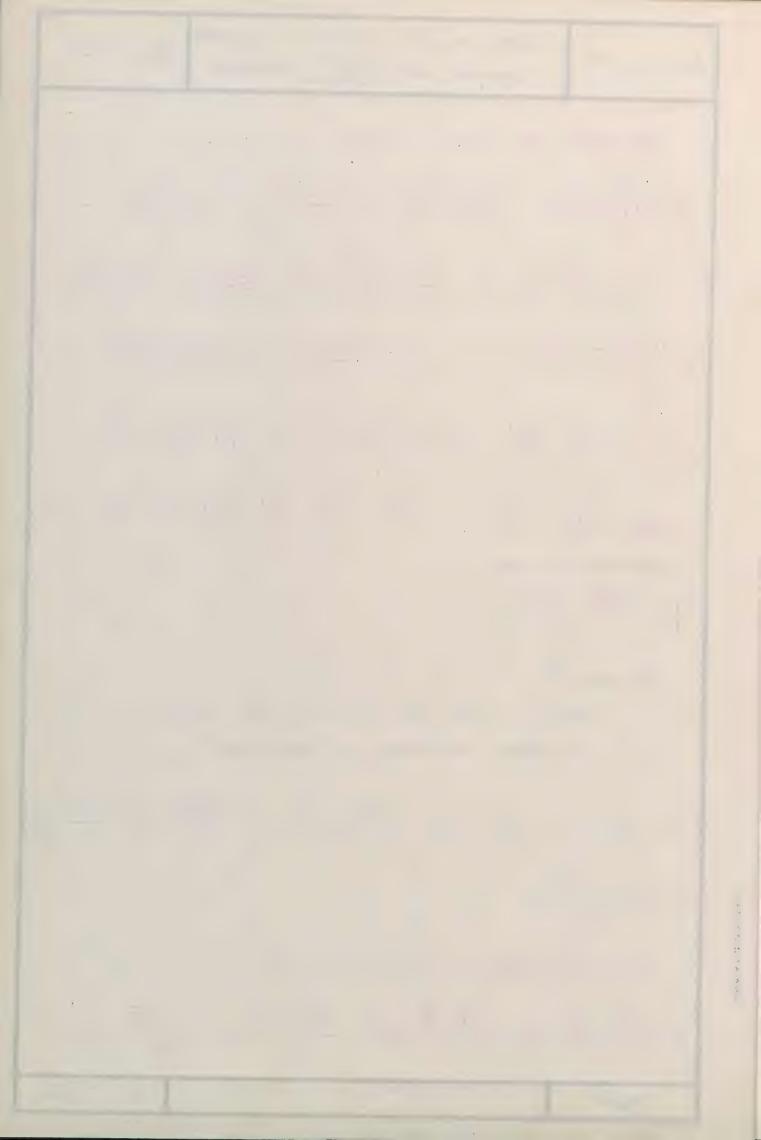
Bastarà sumar al volumen del exaedro, el de las 6 piràmides exteriores; su valor serà:

$$V = \left(\frac{1}{6}\right)^3 + 6 + \frac{1}{3} \times \frac{h}{3} = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}a\right)^3 + 6 \left(\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{3}a\right)^2 \times \left(\frac{3 - \sqrt{3}}{3} \times \frac{a}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

$$= \frac{8 \times (9 - 4\sqrt{3})}{9} a^{2}$$

Desarrollo del calculo auterior:

$$V = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}a\right)^3 + 6 \times \left(\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3}a\right)^2 \times \frac{3-\sqrt{3}}{3}a = \frac{8\times3\sqrt{3}}{27}a^3 + \frac{3-\sqrt{3}}{27}a^3 + \frac{3-\sqrt{$$



16 in a 8

$$+ 2 \times \left(\frac{18 + 6 - 6\sqrt{12}}{9} a^{2} \times \frac{3 - \sqrt{3}}{3} a\right) = \left(\frac{8\sqrt{3}}{9} + 2 \times \frac{24 - 12\sqrt{3}}{9} \times \frac{3 - \sqrt{3}}{3}\right) a^{2} = \left(\frac{8\sqrt{3}}{9} + \frac{2 \times 12 \times (2 - \sqrt{3}) \times (3 - \sqrt{3})}{27}\right) a^{2} = \left(\frac{8\sqrt{3}}{9} + \frac{2 \times 4 \times (6 - 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 3)}{27}\right) a^{3} = \frac{8\sqrt{3} + 8 \times (9 - 5\sqrt{3})}{9} a^{3} = \frac{3}{9}$$

$$= \frac{8\sqrt{3} + 72 - 40\sqrt{3}}{9} a^3 = \frac{72 - 32\sqrt{3}}{9} a^3 = \frac{8 \times (9 - 4\sqrt{3})}{9} a^3$$

Angulo voctilines 20 des dedes formado por la intersección de una cara del exactro con la correspondiente del ce-Takans

De las figuras de la lamina 23 se deduce que cho angulo 20 es suplementario del remiangulo Y que forman dos caras contiguas del octardo.

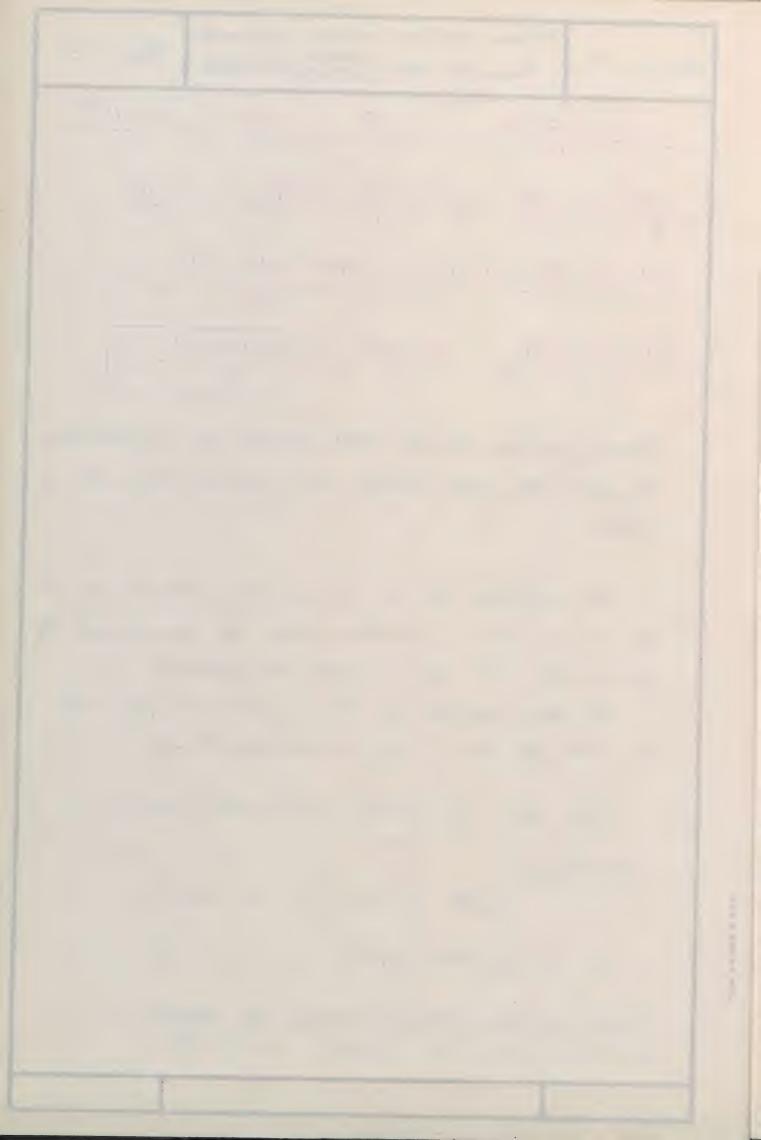
Il valor conocido de 24 es (ver lam. 3, form. 25) 109° 28' 16,6", por consigniente ma

20 = 180° - \frac{1}{2} \left(109° 28' 16.6" \right) = 125° 15' 51.7"

analiticamente

$$\sin 2\theta = \sin \psi = \frac{\sqrt{6}}{3} = 0.21 64 97$$

in to action 24 del deed the conedo (rec lam. 2, 15:m. 15) 24:90° sen 4 = 12



Inerelo acctiliono "29," del dectes del sotardo (con lam. 3. (c.m. 25) 24, = 109° 28' 16,6" cu $P_g = \frac{\sqrt{6}}{3}$

los resultados anteriores.

CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal oproximado
216	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$ a	1, 15 47 01 A
217	V2 a	1, 41 42 14 A
218 +	3 V2 - V6	0, 59 77 17 a
219 9	$\frac{6-2\sqrt{3}}{3}$ a	0, 84 52 99 a
²²⁰ h	$\frac{3-\sqrt{3}}{3}$ d	o. 42 26 50 a
221 5	4 × (6 V3 - 8) a2	9, 56 92 19 a ²
222 V	$\frac{8 \times (9 - 4\sqrt{3})}{9} \stackrel{3}{q}$	1, 84 /5 97 a ³
223 20	$\pi - \frac{1}{z} (2 \frac{1}{8})$	125° 15′ 51.7″
224 2 4 ₆	$\frac{\pi}{2}$	90°
225 2 48	arc sen $\frac{\sqrt{6}}{3}$	109° 28' 16.6"



FIGURA COR POLEA

Para obtener este figura se universe presidente el crassero regular de 63,5 mm de lado, en enque caras se delapere previamente la base de la praiser some mentare, amajordiente
al relativo: decha é se es un madrad de 32,7 mm de lado
colocado en el milerier de la rece del exacelo con en cu centro coincidente ; un résteure un les mediatives de los lado de ésta.
Proterre non re aco, invin a las caras del exacelo la reis
pirameda, formadas cada una por cuatro treanques equilateros de 32,9 mm de lado.



Representar por el método gráficoanalítico, en los planos I II y III, el
poliedro resultante de la intesección
de un exaedro y octaedro regulares
recíprocamente conjugados y de esfera circunscrita común, siendo los vértíces de cada uno de ellos las proyecciones desde el centro de dicha
esfera, y sobre ésta, de los centros
de las caras del otro.

Las coordenadas del centro de la esfera son: O (72, 72, 85) mm y el radio de la misma de 55 mm.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

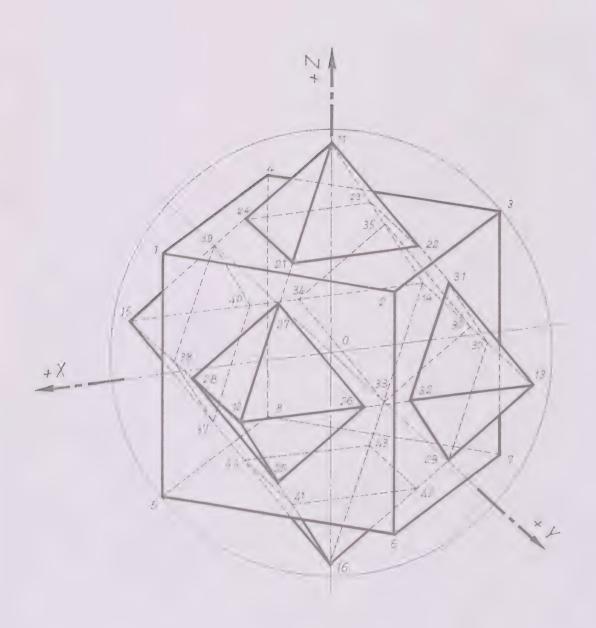
VÉRTICES	
N DE V	
ACIÓ	
NUMER	

1+

			0	
Califi-			res	
Entregada				regulares
Propuesta De entrega Entregada				
Propuesta		The second state of the se		Polledros
	Fecha:	Alumno:	Escala	1:1

Escuela Curso onvexos conjugados Lámina 23







ENUNCIADO

planos I, II q III, el prisedro resultante de la contra sección de um dodecardio que inicosardo regulares rección de um dodecardio que inicosardo regulares reciprocamente conjugados que espera circumserita comin, siendo los vertices de cada umo de ellos fas proyecciones desde el centro de dicha espera, y situa esta de la caras del ctra.

Las coordenadas del centro de la espera um:

0 (73, 72, 18) an adas de la mana de 55 mm.

Delujas en formato 13 v. a estala 1:1.

 $\frac{DATOS}{2} = 0 (72, 72, 25) = 0$ $\frac{2}{12} = 0 = 55 \text{ n.m.}$

UNE A4 210 X 297



PROCESO GRÁFICO

Procederemos previamente a la representación del dodecaedro e icosaedro compugado, inscritos en una misma esfera de 55 mm de radio.

Comencemos pa el icosaedos regular, que coloraremos en la posicion representada en la lámina 5, signiendo el proceso gráfico de la crima. El lado lo de este icosaedro, será (ver lám. 5, fórm. 43)

$$l_{20} = \frac{a_{20}}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} = \frac{55}{0.95 \cdot 10.57} = 57.8 \text{ m.s.}$$

El dodecaedro regular, conjugado del auterior e inscrito en su misma esfera, tendrá una posición en relación con el icoracdro ya dibujado, simetrica con respecto a un eje paralelo a Z
de la representada en la lámina 4. El lado 1,2 de este dodecaedro, será (ver lám. 4, fórm. 30)

$$f_{12} = \frac{G_{12}}{V_{15} + V_{3}} = \frac{55}{1.40 \ 12 \ 59} = 39.3 \ \text{mm}.$$

Plantiado el problema de interrección de ambos poliedros, se punde obtense el unidado por apresente del mileto de mileto de meste de sección de caras o de aristas enyo fundamento se expone en la Jeometría Descriptiva.

Esta interseccion se reduce a la penetración de los anquelos



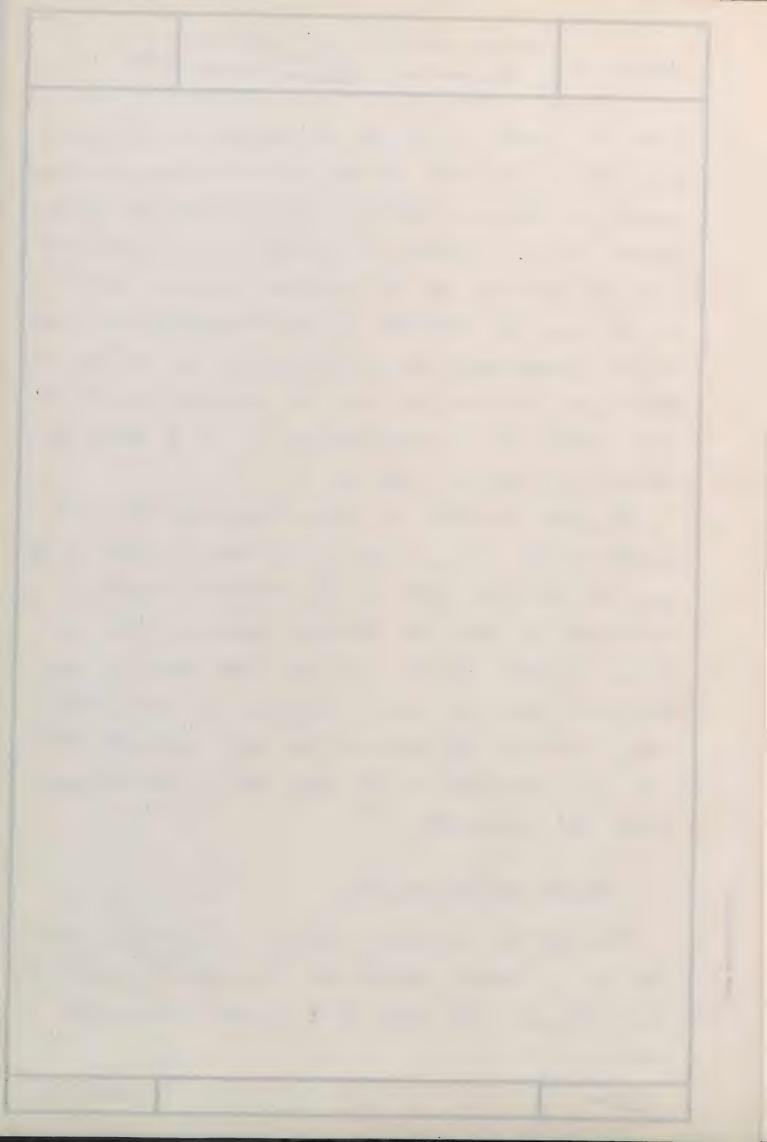
solidos del icosaedro en las caras del dodecaedro que, por razones de simetría en la posición relativa de ambos poliedros, son todes ignales y en forma de pentagomo regular. Combinando las proyecciones de los dos poliedros en los planos I y II, pueden obtemerse las proyecciones de estos pentagonos regulares situados
en cada cara del dodecaedro (limeas de penetración del icosaedro en el dodecaedro) unas directamente y las restantes mediente giros adecuados de una de las aristas de dicho air
quelo sólido. De las proyecciones en I y II se obtiene fácilmente la proyección sobre II.

decaedro cequilar en cuyas caras, y centradas con ellas, se apoyan un pracio de las pentagual regular, y cacas laterales en joune de triangulos equilateros. Estas peramides son todas ignales y en base sobre cada cara del
dodecaedro tiene el centro coincidente con el de dicha
cara; sos vertices del pentagono base de la piramide estan
sobre las mediatrices de los lados de la cara correspondiente del dodecaedro.

PROCESO GRAFICO- ANALÍTICO

Para facilitar el dibujo y consequir una mayor escactitud en su trazado, calcularemos us seguientes mayordudes en función del natio a de la espera circunsoreta semún:

(-60



1,2 = Lada del dodecaedro

la = into del icus des

1 - bado del pentagono regular intersección de un anquito sólido del icosaedro con una cara del dodecaedro.

i = Radio de la circumferencia circumscrita al pentagono

h: Altura de la piramide escterior a una cara del dode ca edes

S: Inperficie lateral

V = Nohumen

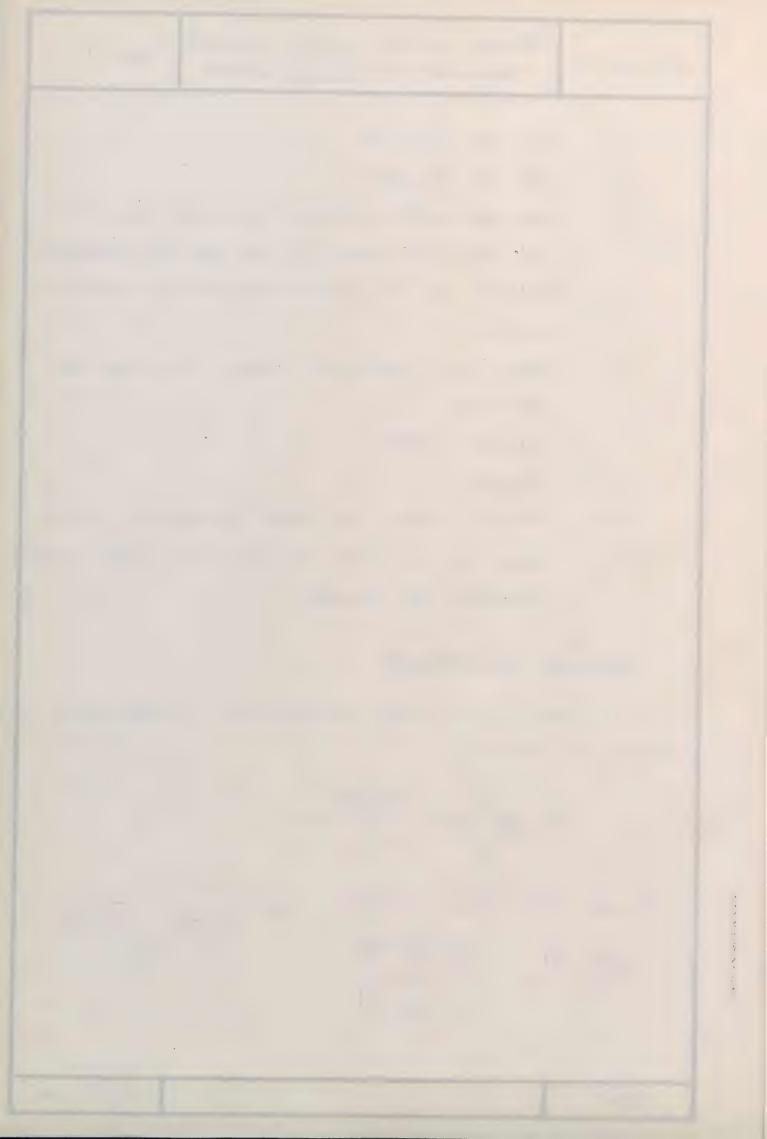
20 = Amquelo rectelineo del decdeo fermado en la entersección de una cara del dodecacdro con la correspondiente del icosacdro.

bado "ly" del dodecaedro

Ja la hemos de terminado anteriormente (« deduce de la foramela 30, lám. 4)

$$\ell_{12} = \frac{a}{\sqrt{15} + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{3}$$

Lesanollo del cálculo auterior: $l_{12} = \frac{a}{\sqrt{15} + \sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{15} + \sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{15} + \sqrt{3}}$ $4 \left(\sqrt{15} - \sqrt{3}\right) = \sqrt{15} - \sqrt{3}$



bado "l'zo del incoraedro

Igualmente hemos visto que (lan. 5, firmula 43)

$$\ell_{20} = \frac{Q}{\sqrt{10 + 2 \sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{10 \cdot (5 - \sqrt{5})}}{5}$$

Desarrollo del calculo auterior: $l_{20} = \frac{a}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} = \frac{4}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} = \frac{4}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} = \frac{4}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$

 $= \frac{4\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{10+2\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{10+2\sqrt{5}} \cdot (10-2\sqrt{5})}{100-20} = \frac{4\sqrt{(10+2\sqrt{5})(10-2\sqrt{5})^2}}{80}$

 $= \frac{\sqrt{(100-20)(10-2\sqrt{r})}}{20} = \frac{\sqrt{80\times2\times(5-\sqrt{r})}}{20} = \frac{4\sqrt{10(5-\sqrt{r})}}{20} = \frac{\sqrt{10\times(5-\sqrt{r})}}{5} = \frac{\sqrt{10\times(5-\sqrt{r})}}{5}$

Altura "h" de la piramide eseterior a mina cara del dode caedro.

En la lanima 24 se puede observar que didra altura es la diferencia entre el radio a de la esfera circumsereta y el radio C_{12} de la esfera inscrita en el dodeca edro (ver lam. 4, form. 32); su valor será pues

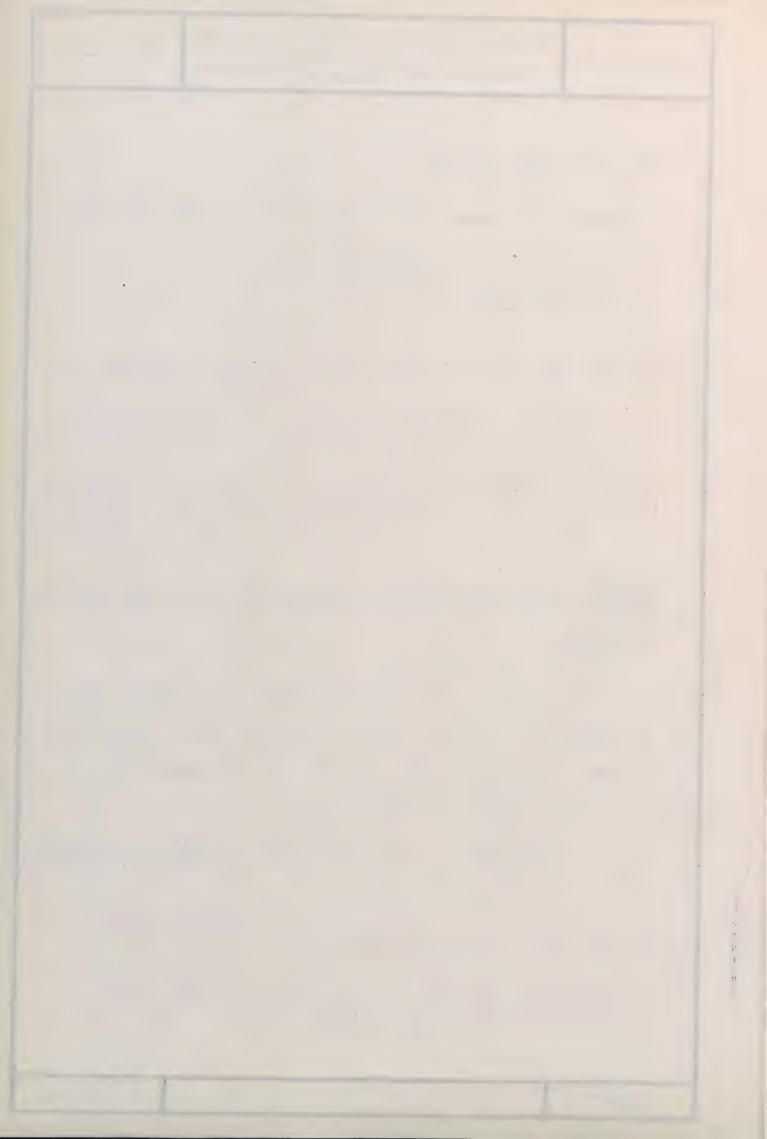
$$h = a - \sqrt{\frac{11\sqrt{5} + 25}{40}} l_{12} = a - \sqrt{\frac{11\sqrt{5} + 25}{40}} \times (\frac{\sqrt{15} - \sqrt{2}}{3}) a = (1 - \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}}) a$$

Desarrollo del calculo auterior: h= a- \(\frac{11 \sqrt{5} + 25}{40} \) \(\text{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{3} \) a =

$$= \left(1 - \sqrt{\frac{11\sqrt{5} + 25}{40} \times \left(\frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{3}\right)^2}\right) a = \left(1 - \sqrt{\frac{11\sqrt{5} + 25}{40} \times \frac{15 + 3 - 2\sqrt{45}}{9}}\right) a =$$

CCC

1 - 5 - 30



$$= \left(1 - \sqrt{\frac{11\sqrt{5} + 25}{40}} \times \frac{18 - 6\sqrt{5}}{9}\right) a = \left(1 - \sqrt{\frac{(11\sqrt{5} + 25)(3 - \sqrt{5})}{60}}\right) a =$$

$$= \left(1 - \sqrt{\frac{33\sqrt{5} + 75 - 55 - 25\sqrt{5}}{60}}\right) a = \left(1 - \sqrt{\frac{20 + 2\sqrt{5}}{60}}\right) a = \left(1 - \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}}\right) a$$

Lado "f' del pentagono aegular interseccion de un ainque lo solido del icosaedro, con una cara del dodecaedro.

En la lamina 24 potemos comprober que las cinco casas consurrentes en un vértice del icosaedro forman una piramide recta, regular, pentagonal de altura "920", enyo
Nalor es (ver lam. 5, formula 20)

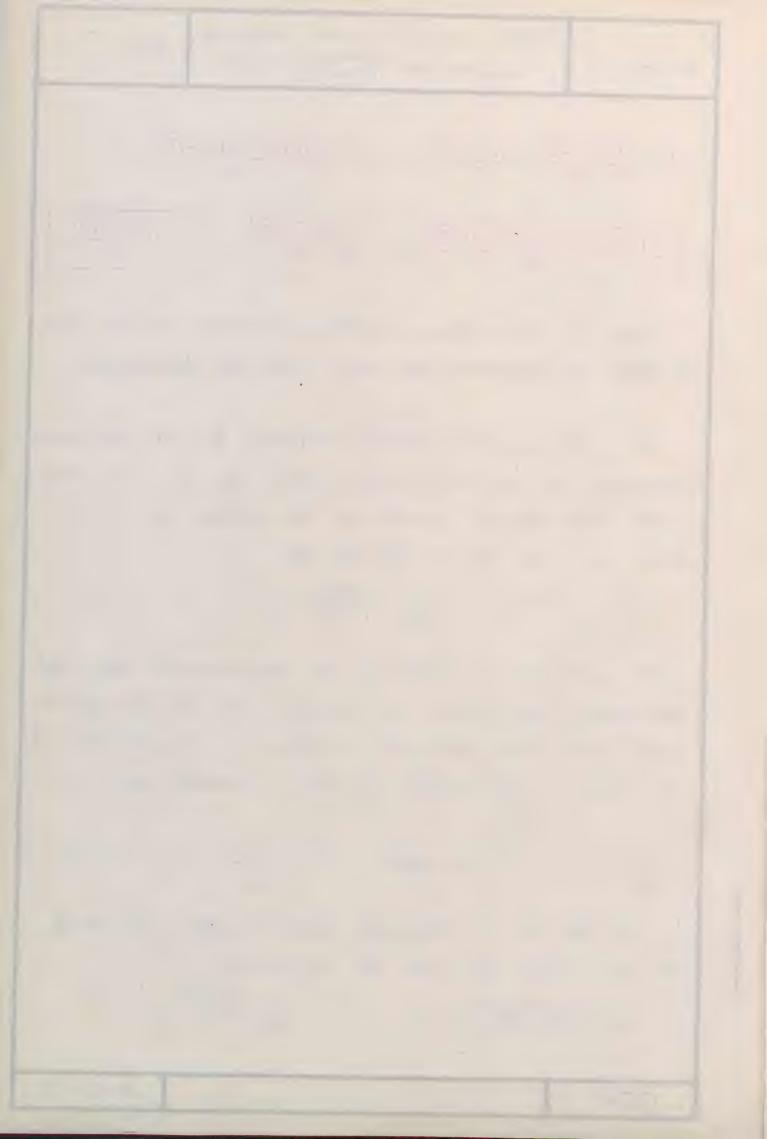
$$g_{2c} = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{\varepsilon}}{10}} \ell_{20}$$

Esta siráminis es contada par la correspondente cara del dodecaedro, cuyo plano es paralelo a la base de aquella, produciendo otra pirámide semejante a la primera. Se la semejanza de ambas pirámides se deduce que

$$\frac{\ell_{20}}{g_{20}} = \frac{f}{h} \qquad \text{de doude} \qquad f = \frac{h \times \ell_{20}}{g_{20}}$$

El valor de "h' deducids auteriormente, y el de 920 (ver lam. 5, form. 20), con los signientes:

$$h = \left(1 - \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}}\right) a$$
 $g_{20} = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}} l_{25}$



que sustituids en la auterior, mos de

$$f = \frac{h \cdot l_{eo}}{g_{20}} = \frac{\left(1 \cdot \sqrt{\frac{5}{15}}\right)a \ l_{20}}{\sqrt{\frac{5 \cdot \sqrt{5}}{10}} \ l_{20}} = \frac{1 \cdot \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}}}{\sqrt{\frac{5 \cdot \sqrt{5}}{10}}} a = \frac{3\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - (3\sqrt{3} + \sqrt{15})}{6} a$$

Desarrollo del cálculo auterior: $f = \frac{1 - \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{\sqrt{5 - \sqrt{5}}} = a = \frac{1 - \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{\sqrt{5 - \sqrt{5}}}$

$$\frac{\left(1 - \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}}\right)\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}}{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}} = \frac{10\left(1 - \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}}\right)\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}\left(5 + \sqrt{5}\right)}{20}$$

$$\frac{5 - \sqrt{5}}{10}$$

$$\frac{10}{10}$$

$$\left(1 - \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}}\right)\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}\left(5 + \sqrt{5}\right)}$$

$$= \frac{10\left(1 - \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}}\right)\sqrt{\frac{20\left(5 + \sqrt{5}\right)}{10}}}{\frac{10}{10}}$$

$$= \left(1 - \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}}\right) \sqrt{\frac{2(5 + \sqrt{5})}{4}} \alpha = \left(1 - \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}}\right) \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} \alpha =$$

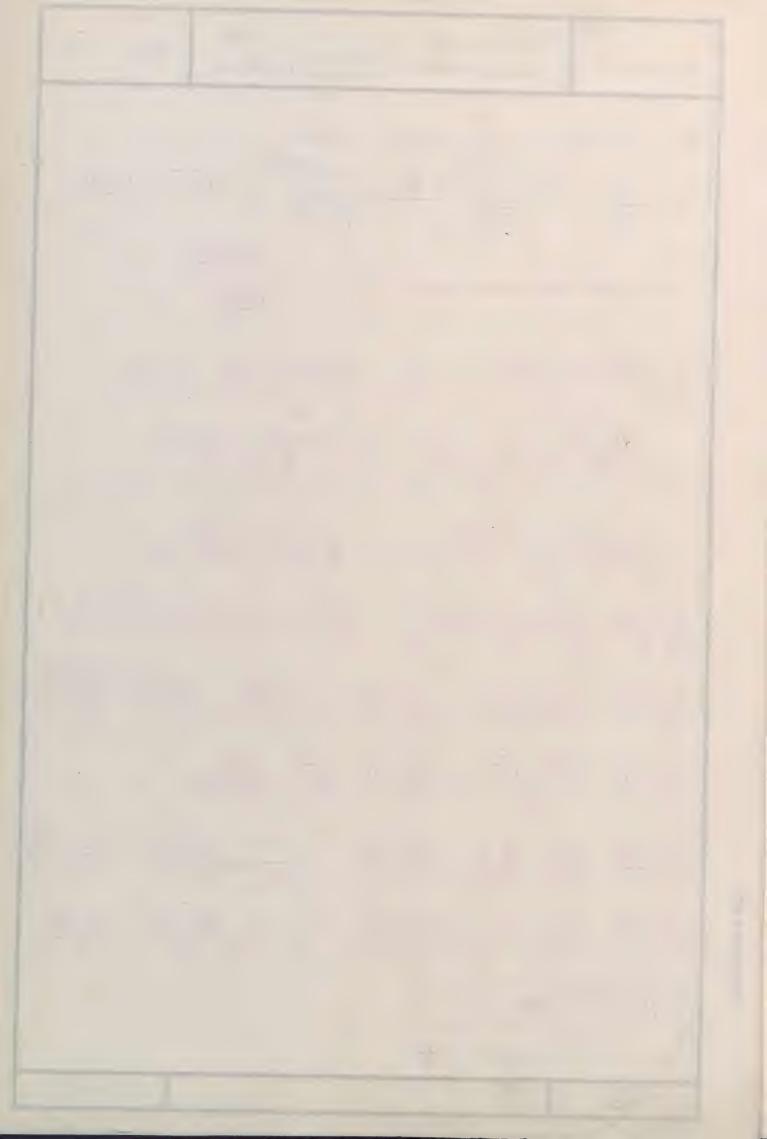
$$= \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}{30}} a = \left[\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \sqrt{\frac{25+i0\sqrt{5}+5\sqrt{5}+i0}{30}}\right] a = \left[\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \sqrt{\frac{25+i0\sqrt{5}+5\sqrt{5}+i0}{30}}\right] a = \left[\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \sqrt{\frac{25+i0\sqrt{5}+5\sqrt{5}+i0\sqrt{5}+i$$

$$= \left[\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \sqrt{\frac{35+15\sqrt{5}}{30}} \right] a = \left[\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{6}} \right] a = \left[\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{6}} \right] a$$

$$= \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}}}{\sqrt{6}} \right) a = \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \left(\sqrt{\frac{9}{12}} + \sqrt{\frac{5}{42}} \right) \right) a =$$

$$= \left[\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \left(\frac{3}{2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} \right) \right] a = \left[\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} \right] a = \left[\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{2} \right] a$$

$$= \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{6} = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{2} = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{6} = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{2} = \frac$$



W-4 .. " "

Pate i de la circumenta incorrecta as poutações base

in a mi me as d'in al cosis I de la circunterencie circumscrita a un pentagono cegular, por la expresson

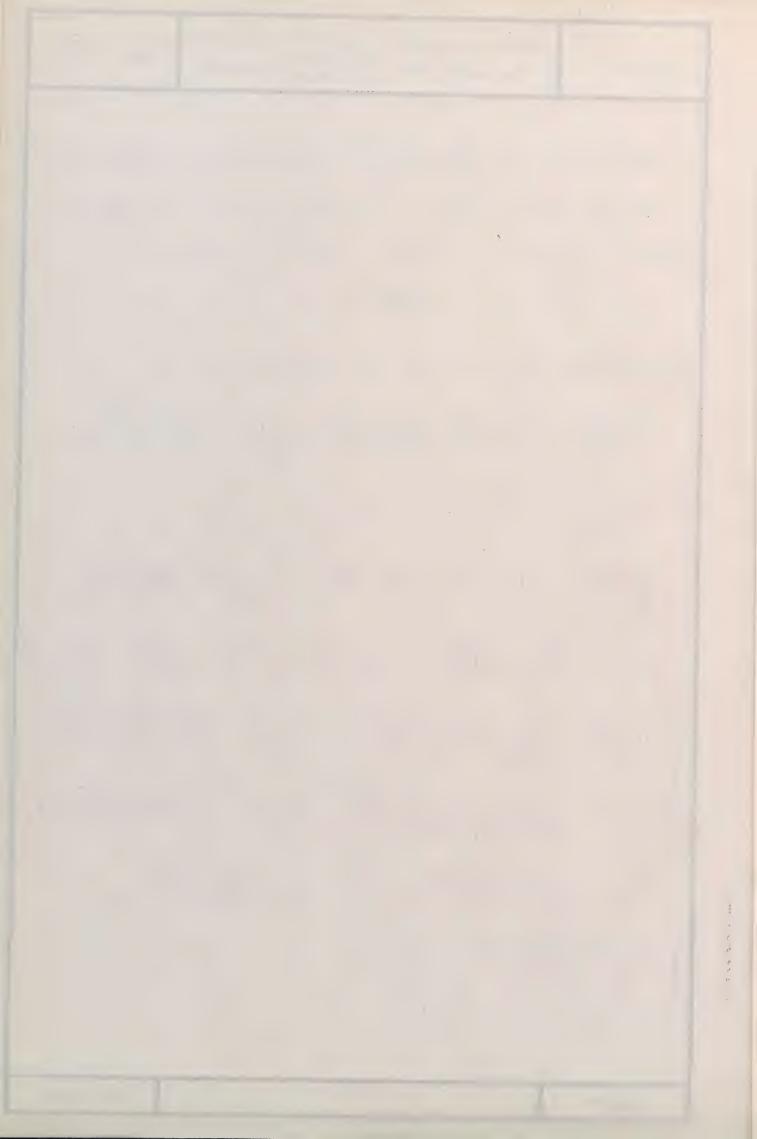
que afforda al caso que mo ocupa, - da

$$i = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}} \times \frac{3\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - (3\sqrt{3} + \sqrt{15})}{6} = (\frac{\sqrt{5} + 1}{2} - \sqrt{\frac{35 + 11\sqrt{5}}{30}}) = (\frac{15 + 11\sqrt{5}}{2} - \sqrt{\frac{35 + 11\sqrt{5}}{30}}) = (\frac{15$$

. Desarrollo del calculo auterior:

 $= \left[\frac{\sqrt{5} + 1}{2} - \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{30}} \right] a$

$$i = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times \frac{3\sqrt{10+2\sqrt{5}} - (3\sqrt{3}+\sqrt{15})}{6} a = \left[\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times \sqrt{2(5+\sqrt{5})} - \frac{2}{2}\right] - \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{3}\sqrt{5}}{6} a = \left[\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times \sqrt{\frac{3(3+\sqrt{5})}{6}}\right] a = \left[\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{20}} - \frac{\sqrt{3}}{6} \sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(3+\sqrt{5})^2}{20}} - \frac{\sqrt{3}}{6} \sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(3+\sqrt{5})^2}{20}}\right] a = \frac{5+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{3}}{6} \sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(9+5+6\sqrt{5})}{10}} a = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{2$$



Ene - 8

Imperficie lateral S

A cada eara del dodecaedro habra que deducir el area del pentagono base de la piramide que re apoya en ella: En Jeometria se obtiene el area de un pentagono regular, en funcion de su lado, por la foramela

que aplicada al caso que mos ocupa, mos permite obtenes el anea lateral S, de las caras del dodecaedro, como rique:

$$S_{1} = 12 \times \left[\frac{\sqrt{25 + 1005}}{4} \times \left(\frac{\sqrt{15 - \sqrt{3}}}{3} a \right)^{2} - \frac{\sqrt{25 + 1005}}{4} \times \left(\frac{3\sqrt{10 + 2\sqrt{5} - (3\sqrt{3} + \sqrt{15})}}{6} a \right)^{2} \right] =$$

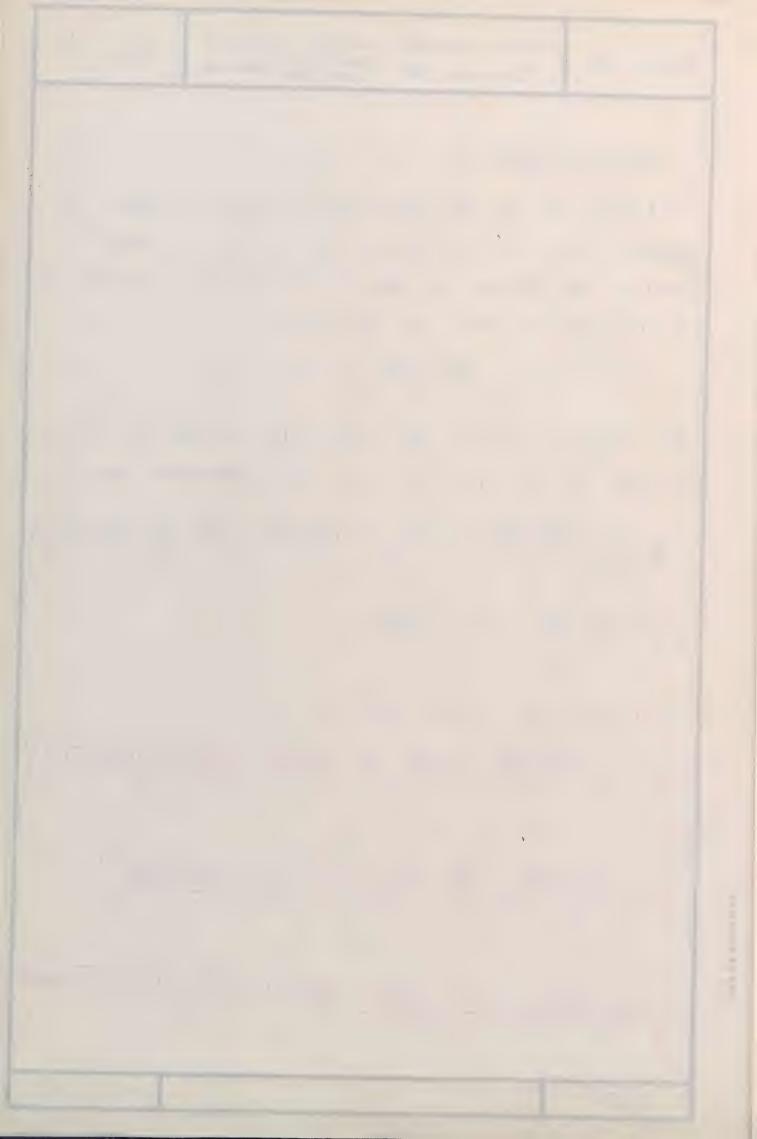
resamollo del calculo auterior:

$$S_{4} = 12 \times \left[\frac{\sqrt{25 + 10 \sqrt{5}}}{4} \times \left(\frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{3} a \right)^{2} - \frac{\sqrt{25 + 10 \sqrt{5}}}{4} \left(\frac{3\sqrt{16 + 2\sqrt{5}} - \left(3\sqrt{3} + \sqrt{15} \right)}{6} a \right)^{2} \right] =$$

$$= 12 \times \frac{\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{4} a^{2} \left[\left(\frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{3} \right)^{2} - \left(\frac{3\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \left(3\sqrt{3} + \sqrt{15} \right)^{2}}{6} \right)^{2} \right] =$$

$$= 3\sqrt{25+10\sqrt{5}} \ a^{2} \left(\frac{15+3-2\sqrt{45}}{9} - \frac{9\left(10+2\sqrt{5}\right)+\left(3\sqrt{3}+\sqrt{15}\right)^{2}-6\sqrt{10+2\sqrt{5}}\times\left(3\sqrt{3}+\sqrt{15}\right)^{2}}{36}\right)$$

UNE A4 210 X 2



Hoja " 9

$$= 3\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} \ a^{2} \left(\frac{18 - 6\sqrt{5}}{9} - \frac{90 + 18\sqrt{5} + (27 + 15 + 6\sqrt{45}) - 6\sqrt{2(5 + \sqrt{5})(3\sqrt{3} + \sqrt{15})^{2}}}{9} \right) = \frac{3\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{36}$$

$$= 3\sqrt{25+10\sqrt{5}} \quad a^{2}\left(\frac{6-2\sqrt{5}}{3} - \frac{90+18\sqrt{5}+42+18\sqrt{5}-6\sqrt{2}\left(5+\sqrt{5}\right)\left(27+15+6\sqrt{45}\right)}{36}\right)$$

$$= 3\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} a^{2} \left(\frac{6 - 2\sqrt{5}}{3} - \frac{132 + 36\sqrt{5} - 6\sqrt{2}(5 + \sqrt{5})(42 + 18\sqrt{5})}{36}\right) =$$

$$= 3\sqrt{25+10\sqrt{5}} \quad a^{2}\left(\frac{6-2\sqrt{5}}{3} - \frac{22+6\sqrt{5}-\sqrt{2\times6\times(5+\sqrt{5})}\left(7+3\sqrt{5}\right)}{6}\right) =$$

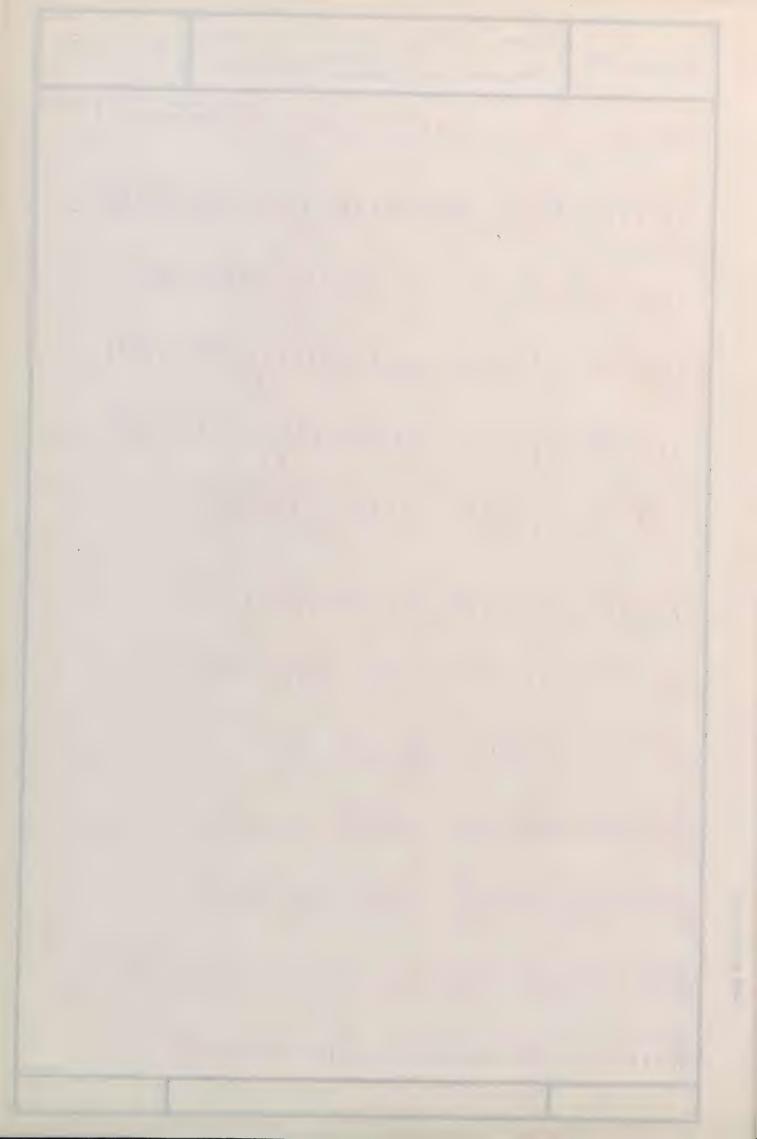
$$= 3\sqrt{25+10\sqrt{5}} a^{2} \left(\frac{6-2\sqrt{5}}{3} - \frac{22+6\sqrt{5}-2\sqrt{3}(35+7\sqrt{5}+15\sqrt{5}+15)}{6} \right) =$$

$$= 3\sqrt{25+10\sqrt{5}} a^{2}\left(\frac{6-2\sqrt{5}}{3} - \frac{11+3\sqrt{5}-\sqrt{3}(50+22\sqrt{5})}{3}\right) =$$

$$= \sqrt{25 + 10\sqrt{5}} \ a^2 \left(6 - 2\sqrt{5} - \left(11 + 3\sqrt{5} - \sqrt{6(25 + 11\sqrt{5})} \right) = 0$$

$$= \sqrt{(25 + 10 \sqrt{5})(25 + 11 \sqrt{5}) \times 6} = 5 \sqrt{(25 + 10 \sqrt{5})(1 + \sqrt{5})^2} = 2$$

$$-\left[\sqrt{6\left(2r^{2}+11\times2r\sqrt{r}+250\sqrt{r}+110\times s\right)}-5\sqrt{\left(2r+10\sqrt{r}\right)\left(1+5+2\sqrt{r}\right)}a^{2}\right]$$



$$= \left[5\sqrt{6(47+21\sqrt{5})} - 5\sqrt{2(75+30\sqrt{5}+25\sqrt{5}+50)} \right] a^{2} =$$

=
$$\left[5\sqrt{6}\sqrt{47+21\sqrt{5}}-5\sqrt{2(125+55\sqrt{5})}\right]a^{2} = y \text{ nieudo } 47^{2}-\left(21\sqrt{5}\right)^{2}=2^{2}$$

$$= \left[5\sqrt{6}\left(\sqrt{\frac{49}{2}} + \sqrt{\frac{45}{2}}\right) - 5\sqrt{10(25 + 11\sqrt{5})}\right] a^{2} =$$

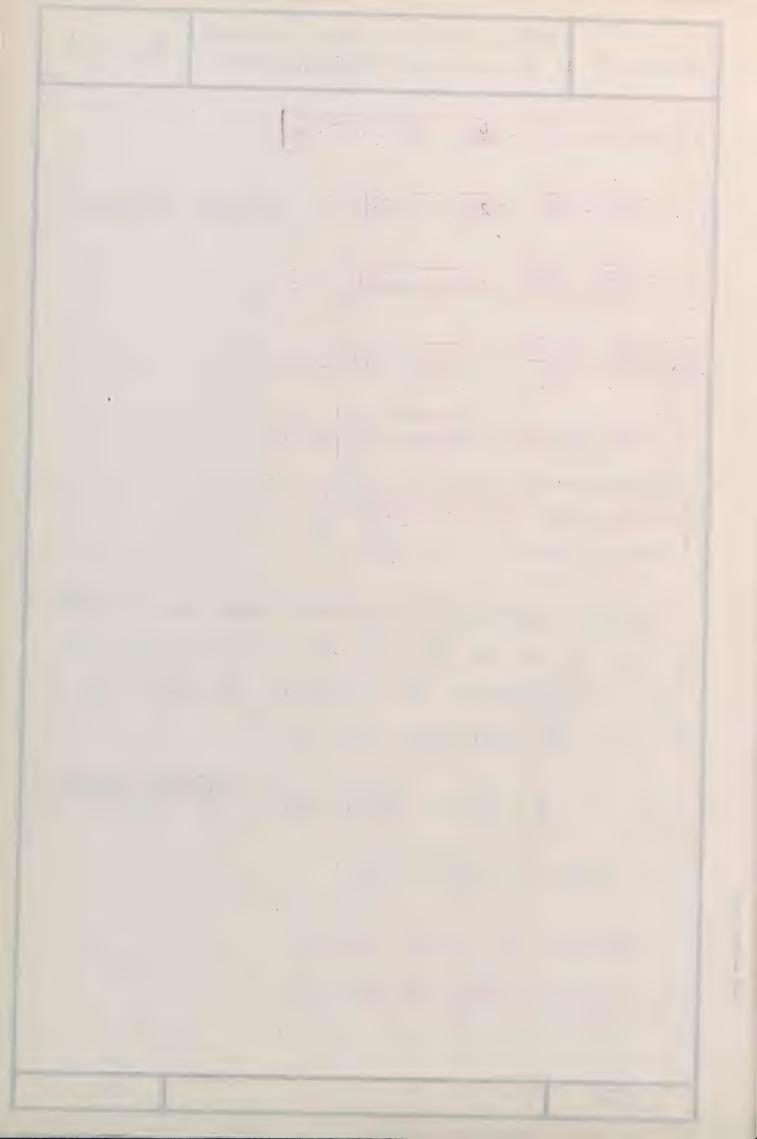
$$= \left[5 \times \left(\frac{\sqrt{6} \sqrt{49}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{6} \sqrt{45}}{\sqrt{2}} \right) - 5 \sqrt{10} \left(25 + 11 \sqrt{5} \right) \right] \alpha^2 =$$

Al area auteriormente calculada, habra que anadirle el area Sz de las doce piramides acetas pentagonales, cuyas caras laterales con triangulos equilaters de la-do "f". - In superficie sera,

$$S_2 = 12 \times \frac{5}{2} f \times \frac{\sqrt{3}}{2} f = 15 \sqrt{3} f^2 = 15 \sqrt{3} \times \left(\frac{3\sqrt{10+2}\sqrt{5} - \left(3\sqrt{3} + \sqrt{15} \right)}{6} \right)^2 = 15 \sqrt{3} \times \left(\frac{3\sqrt{10+2}\sqrt{5} - \left(3\sqrt{3} + \sqrt{15} \right)}{6} \right)^2$$

Desarrollo del calculo auterior:

$$S_2 = 15\sqrt{3} \left(\frac{3\sqrt{10+2\sqrt{5}} - (3\sqrt{3}+\sqrt{15})}{6} \alpha \right)^2 =$$



 $= 15 \sqrt{3} a^{2} \left(\frac{9(10+2\sqrt{5})+(3\sqrt{3}+\sqrt{15})^{2}}{36} + \sqrt{10+2\sqrt{5}} * (3\sqrt{3}+\sqrt{6}) \right)$

 $= 15 \sqrt{3} a^{3} \left(\frac{12(5+\sqrt{5}) + (27+15+6\sqrt{45}) - 6\sqrt{2(5+\sqrt{5})(3\sqrt{3}+\sqrt{15})^{2}}}{36} \right) =$

 $= 15\sqrt{3}a^{2}\left(\frac{18(5+\sqrt{5})+6(7+3\sqrt{5})-6\sqrt{2(5+\sqrt{5})(27+15+6\sqrt{45})}}{36}\right)$

 $= 15\sqrt{3}a^{2}\left(\frac{3(5+\sqrt{5})+(7+3\sqrt{5})-\sqrt{2(5+\sqrt{5})(42+18\sqrt{5})}}{.6}\right)$

= $15\sqrt{3}$ $a^{2}\left(\frac{15+3\sqrt{5}+7+3\sqrt{5}-\sqrt{2(5+15)(7+3\sqrt{5})-6}}{6}\right)$ =

 $= 15 \sqrt{3} a^{2} \left(\frac{22 + 6\sqrt{5} - 2\sqrt{3}(35 + 7\sqrt{5} + 15\sqrt{5} + 15}{6} \right) =$

 $= 15\sqrt{3}a^{2}\left(\frac{11+3\sqrt{5}-\sqrt{3(50+22\sqrt{5})}}{3}\right) = 5\sqrt{3}\left(11+3\sqrt{5}-\sqrt{3}\times2(25+11\sqrt{5})a^{2}\right) = 5\sqrt{3}\left(11+3\sqrt{5}-\sqrt{3}\right) = 5\sqrt{3}\left(11+3\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)$

 $= 5 \left(11\sqrt{3} + 3\sqrt{15} - \sqrt{3}\sqrt{6} \left(25 + 11\sqrt{5} \right) a^{2} \right) \left(11\sqrt{3} + 3\sqrt{15} - 3\sqrt{2} \left(25 + 11\sqrt{5} \right) a^{2} \right)$

Al area total de poliedro, valdra pues

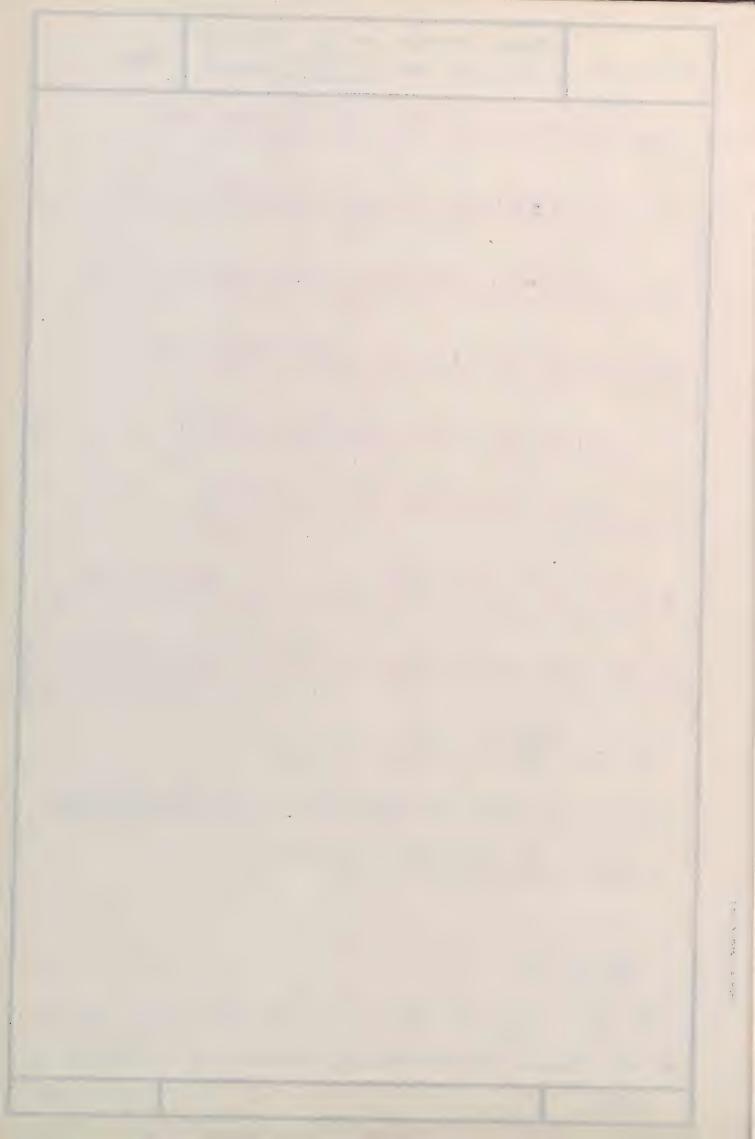
S = S, +S2 = 5 (7 1/2 + 2 1/15 - V10 (25 + 11 1/5)) a2 + 5 (11 1/3 + 3 1/15 - 3 1/2 (21 + 11/15)) a2 =

.. 5 (18 13 + CVIS - VIO (05 + 11 VE) - 3 VE (25 + 11 VE)) a2

William V

El volumen V de est piede es puede de terminar, sumande al volumes V, del deseners montes el este de

16 - 5 - 50



de docc prainides que se aprime note sus caras.

Sie pres tendrenes que (ver live. L., form. 41)

$$V_1 = \frac{7\sqrt{5} + 15}{4} \left(\ell_{12} \right)^3 = \frac{7\sqrt{5} + 15}{4} \times \left(\frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{3} a \right)^3 = \frac{10\sqrt{3} + 2\sqrt{15}}{9} a^3$$

Desarrollo del calculo auterior: $V_1 = \frac{7\sqrt{5} + 15}{4} \times \left(\frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{3}a\right)^3 =$

$$= \frac{7\sqrt{5} + 15}{4} \times \frac{15\sqrt{15} - 3 \times 15 \times \sqrt{3} + 3\sqrt{15} \times 3 - 3\sqrt{3}}{3^3} \quad a^3 = \frac{7\sqrt{5} + 15}{4} \times \frac{3\sqrt{5} + 15}{4} \times \frac{3\sqrt{$$

$$\times \frac{5\sqrt{15} - 15\sqrt{3} + 3\sqrt{15} - \sqrt{3}}{3^2} a^3 = \frac{7\sqrt{5} + 15}{4} \times \frac{8\sqrt{15} - 16\sqrt{3}}{9} a^3 =$$

 $\frac{8 \times (7 \sqrt{5} + 15) (\sqrt{15} - 2 \sqrt{3})}{4 \times 9} a^{3} = \frac{2 \times (7 \sqrt{15} \times 5 + 15 \sqrt{15} - 14 \sqrt{5} \times 3 - 30 \sqrt{3})}{9} a^{3} = \frac{2 \times (7 \sqrt{5} \times 5 + 15 \sqrt{15} - 14 \sqrt{5} \times 3 - 30 \sqrt{3})}{9} a^{3} = \frac{2 \times (7 \sqrt{5} \times 5 + 15 \sqrt{15} - 14 \sqrt{5} \times 3 - 30 \sqrt{3})}{9} a^{3} = \frac{2 \times (7 \sqrt{5} \times 5 + 15 \sqrt{15} - 14 \sqrt{5} \times 3 - 30 \sqrt{3})}{9} a^{3} = \frac{2 \times (7 \sqrt{5} \times 5 + 15 \sqrt{15} - 14 \sqrt{5} \times 3 - 30 \sqrt{3})}{9} a^{3} = \frac{2 \times (7 \sqrt{5} \times 5 + 15 \sqrt{15} - 14 \sqrt{5} \times 3 - 30 \sqrt{3})}{9} a^{3} = \frac{2 \times (7 \sqrt{5} \times 5 + 15 \sqrt{15} - 14 \sqrt{5} \times 3 - 30 \sqrt{3})}{9} a^{3} = \frac{2 \times (7 \sqrt{5} \times 5 + 15 \sqrt{15} - 14 \sqrt{5} \times 3 - 30 \sqrt{3})}{9} a^{3} = \frac{2 \times (7 \sqrt{5} \times 5 + 15 \sqrt{15} - 14 \sqrt{5} \times 3 - 30 \sqrt{3})}{9} a^{3} = \frac{2 \times (7 \sqrt{5} \times 5 + 15 \sqrt{15} - 14 \sqrt{5} \times 3 - 30 \sqrt{3})}{9} a^{3} = \frac{2 \times (7 \sqrt{5} \times 5 + 15 \sqrt{15} - 14 \sqrt{5} \times 3 - 30 \sqrt{3})}{9} a^{3} = \frac{2 \times (7 \sqrt{5} \times 5 + 15 \sqrt{15} - 14 \sqrt{5} \times 3 - 30 \sqrt{3})}{9} a^{3} = \frac{2 \times (7 \sqrt{5} \times 5 + 15 \sqrt{15} - 14 \sqrt{5} \times 3 - 30 \sqrt{3})}{9} a^{3} = \frac{2 \times (7 \sqrt{5} \times 5 + 15 \sqrt{15} - 14 \sqrt{5} \times 3 - 30 \sqrt{3})}{9} a^{3} = \frac{2 \times (7 \sqrt{5} \times 5 + 15 \sqrt{15} - 14 \sqrt{5} \times 3 - 30 \sqrt{3})}{9} a^{3} = \frac{2 \times (7 \sqrt{5} \times 5 + 15 \sqrt{15} - 14 \sqrt{5} \times 3 - 30 \sqrt{3})}{9} a^{3} = \frac{2 \times (7 \sqrt{5} \times 5 + 15 \sqrt{15} - 14 \sqrt{5} \times 3 - 30 \sqrt{3})}{9} a^{3} = \frac{2 \times (7 \sqrt{5} \times 5 + 15 \sqrt{15} - 14 \sqrt{5} \times 3 - 30 \sqrt{3})}{9} a^{3} = \frac{2 \times (7 \sqrt{5} \times 5 + 15 \sqrt{5} - 14 \sqrt{5} \times 3 - 30 \sqrt{3})}{9} a^{3} = \frac{2 \times (7 \sqrt{5} \times 5 + 15 \sqrt{5} - 14 \sqrt{5} \times 3 - 30 \sqrt{3})}{9} a^{3} = \frac{2 \times (7 \sqrt{5} \times 5 + 15 \sqrt{5} - 14 \sqrt{5} \times 3 - 30 \sqrt{3})}{9} a^{3} = \frac{2 \times (7 \sqrt{5} \times 5 + 15 \sqrt{5} - 14 \sqrt{5} \times 3 - 30 \sqrt{3})}{9} a^{3} = \frac{2 \times (7 \sqrt{5} \times 5 + 15 \sqrt{5} - 14 \sqrt{5} \times 3 - 30 \sqrt{3})}{9} a^{3} = \frac{2 \times (7 \sqrt{5} \times 5 + 15 \sqrt{5} - 14 \sqrt{5} \times 3 - 30 \sqrt{3})}{9} a^{3} = \frac{2 \times (7 \sqrt{5} \times 5 + 15 \sqrt{5} - 14 \sqrt{5} \times 3 - 30 \sqrt{3})}{9} a^{3} = \frac{2 \times (7 \sqrt{5} \times 5 + 15 \sqrt{5} - 14 \sqrt{5} \times 3 - 30 \sqrt{3})}{9} a^{3} = \frac{2 \times (7 \sqrt{5} \times 5 + 15 \sqrt{5} - 14 \sqrt{5} \times 3 - 30 \sqrt{5})}{9} a^{3} = \frac{2 \times (7 \sqrt{5} \times 5 + 15 \sqrt{5} - 14 \sqrt{5} + 14 \sqrt{5} - 14 \sqrt{5}$

$$= \frac{2 \times (7 \times 5 \times \sqrt{3} + 15 \sqrt{15} - 14 \sqrt{15} - 30 \sqrt{3})}{9} a^{3} = \frac{2 (5 \sqrt{3} + \sqrt{15})}{9} a^{3} =$$

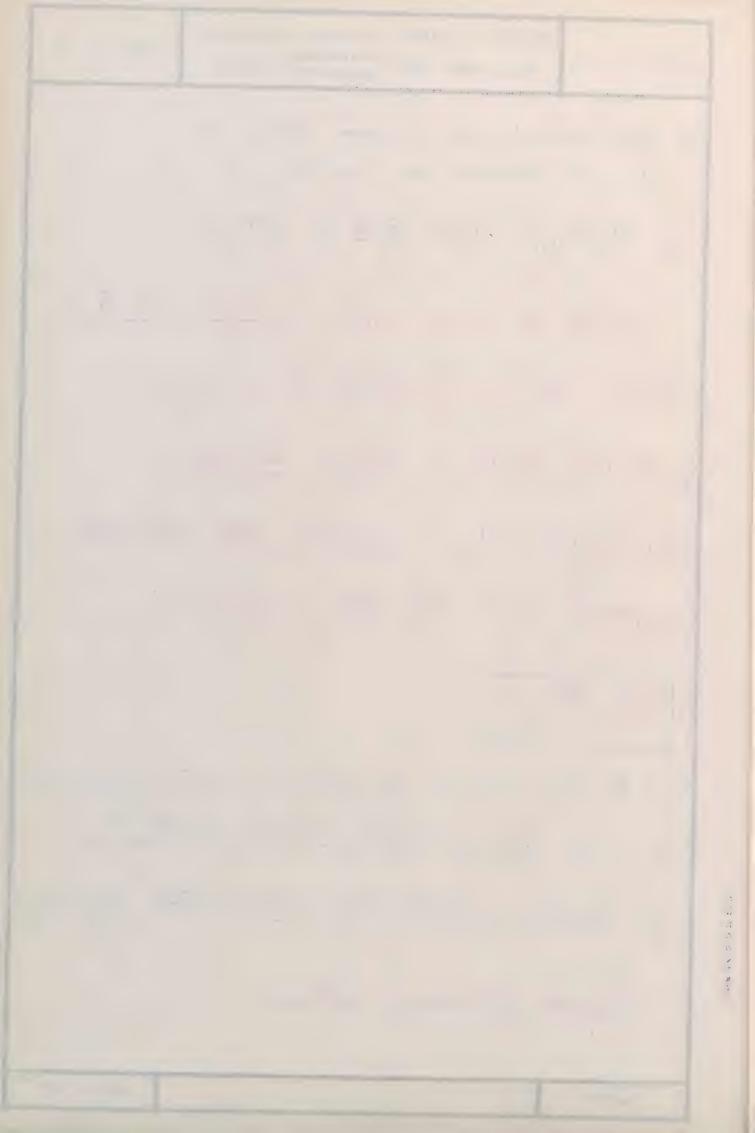
$$= \frac{10\sqrt{3} + 2\sqrt{15}}{9} a^{3}$$

El volumen 1/2 de las doce pissa ides pontagonales serà:

$$V_2 = 12 \left(S_5 \times \frac{h}{3}\right) = 12 \times \frac{\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{4} \times \left(\frac{3\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - (3\sqrt{3} + \sqrt{15})}{6}a\right)^2 \times \frac{12\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - (3\sqrt{3} + \sqrt{15})}{6}a$$

$$\times \frac{1}{3} \left(1 - \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}} \right) \alpha = \left[\frac{\sqrt{10} \left(745 + 331\sqrt{5} \right)}{3} + \frac{\sqrt{10} \left(445 + 199\sqrt{5} \right)}{3} - \frac{190\sqrt{3} + 82\sqrt{15}}{9} \right] a^{3}$$

Desarrollo del calculo anterior:



$$V_2 = 12 \times \frac{\sqrt{25 + 10 \sqrt{5}}}{4} \times \left(\frac{3\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - (3\sqrt{3} + \sqrt{15})}{6}a\right)^2 \times \frac{\left(1 - \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}}\right)}{3}a = \frac{12}{3}$$

$$= \frac{12}{4 \times 6^2 \times 3} \times \sqrt{5(5+2\sqrt{5})} \times \left(1 - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right) \times \left(3\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \left(3\sqrt{3}+\sqrt{15}\right)^2 a^3 =$$

$$= \frac{1}{36} \times \left[\sqrt{5(5+2\sqrt{5})} - \frac{\sqrt{5}\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{\sqrt{15}} \right] \times \left[9 \times \left(10+2\sqrt{5} \right) + \left(3\sqrt{3} + \sqrt{15} \right)^2 - \frac{1}{36} \times \left[\sqrt{5(5+2\sqrt{5})} - \frac{\sqrt{5}\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{\sqrt{15}} \right] \right] = \frac{1}{36} \times \left[\sqrt{5(5+2\sqrt{5})} - \frac{\sqrt{5}\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{\sqrt{15}} \right] = \frac{1}{36} \times \left[\sqrt{5(5+2\sqrt{5})} - \frac{\sqrt{5}\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}} \right] = \frac{1}{36} \times \left[\sqrt{5(5+2\sqrt{5})} - \frac{\sqrt{5}\sqrt{5+2\sqrt{5}} \right] = \frac{1}{36} \times \left[\sqrt{5(5+2\sqrt{5})} - \frac{\sqrt{5}\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \right] = \frac{1}{36} \times \left[\sqrt{5(5+2\sqrt{5})} - \frac{\sqrt{5}\sqrt{5}}$$

$$-6 \sqrt{2(5+\sqrt{5})} \times (3\sqrt{3}+\sqrt{15}) = \frac{1}{36} \left[\sqrt{5(5+2\sqrt{5})} - \frac{(5+2\sqrt{5})-\sqrt{5}}{\sqrt{15}} \right] \times$$

$$\times \left[18(5+\sqrt{5}) + (27+15+6\sqrt{45}) - 6\sqrt{2(5+\sqrt{5})(3\sqrt{3}+\sqrt{15})^2} \right] a^3 =$$

$$= \frac{1}{36} \left[\sqrt{5(5+2\sqrt{5})} - \frac{5+2\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \right] \left[90+18\sqrt{5}+42+18\sqrt{5}-6\sqrt{2(5+\sqrt{5})(27+15+6\sqrt{45})} \right] a^{3} =$$

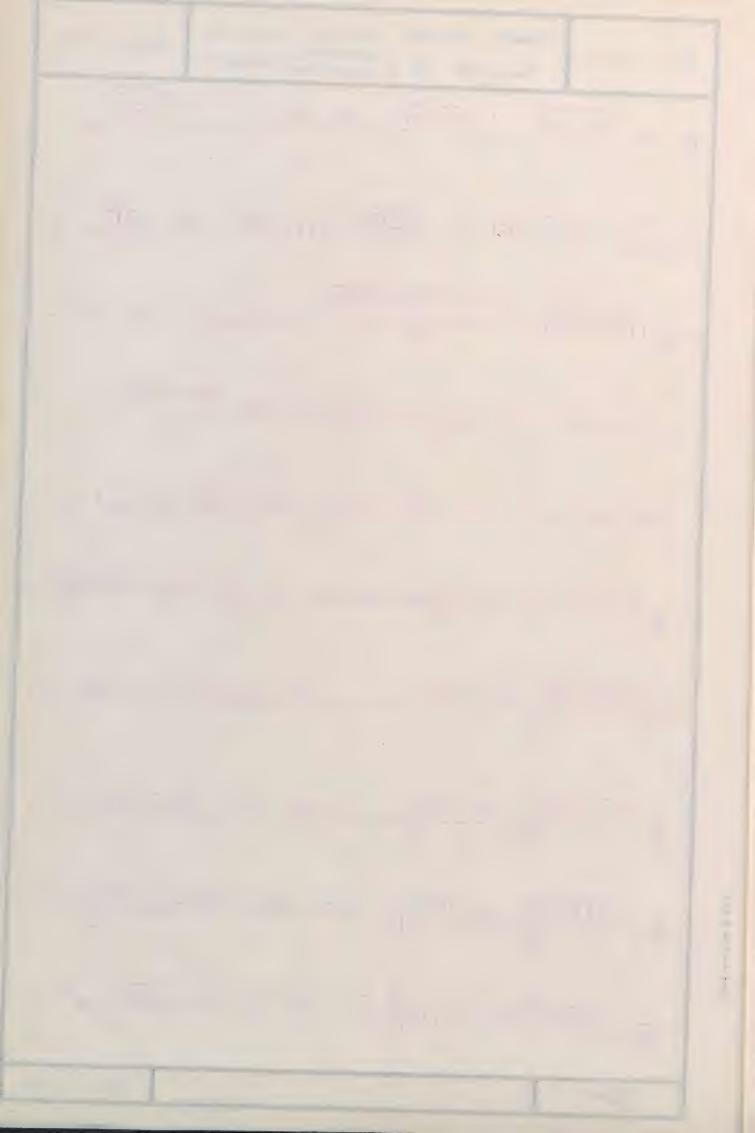
$$=\frac{1}{36}\left[\frac{\sqrt{15}(5+2\sqrt{5})-(5+2\sqrt{5})}{\sqrt{3}}\right]-\left[132+36\sqrt{5}-6\sqrt{2}(5+\sqrt{5})+6(7+3\sqrt{5})\right]a^{3}=$$

$$=\frac{1}{36}\left[\frac{\sqrt{15}(5+2\sqrt{5})-(5+2\sqrt{5})}{\sqrt{3}}\right]\left[132+36\sqrt{5}-12\left[3(5+15)(7+3\sqrt{5})\right]a^{3}=$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{\sqrt{15}(5+2\sqrt{5})-(5+2\sqrt{5})}{\sqrt{3}}\right] \times \left[11+3\sqrt{5}-\sqrt{3}(35+7\sqrt{5}+15\sqrt{5}+15)\right] \alpha^{3}=$$

$$=\frac{1}{3\sqrt{3}}\left(\left(\sqrt{15(5+2\sqrt{5})}-\left(5+2\sqrt{5}\right)\right)\left[11+3\sqrt{5}-\sqrt{3}\left(50+22\sqrt{5}\right)\right]a^{3}=$$

16 - 5 - 72



Toyle a the

$$=\frac{\sqrt{3}}{9}\left[\sqrt{15}\left(5+2\sqrt{5}\right)-\left(5+2\sqrt{5}\right)\right]\times\left[\left(41+3\sqrt{5}\right)-\sqrt{6}\left(25+11\sqrt{5}\right)\right]a^{3}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left((11+3\sqrt{5})\sqrt{15(5+2\sqrt{5})}-(11+3\sqrt{5})(5+2\sqrt{5})-\sqrt{15(5+2\sqrt{5})}\sqrt{6(25+11\sqrt{5})}\right.$$

+
$$(5+2\sqrt{5})\sqrt{6}(25+11\sqrt{5})$$
 $a^{3} = \left[\frac{\sqrt{3}}{9}\times(11+3\sqrt{5})\sqrt{15}(5+2\sqrt{5}) - \frac{\sqrt{3}}{9}(11+3\sqrt{5})(5+2\sqrt{5})\right]$

$$-\frac{\sqrt{3}}{9}\sqrt{15(5+2\sqrt{5})}\sqrt{6(25+11\sqrt{5})}+\frac{\sqrt{3}}{9}(5+2\sqrt{5})\sqrt{6(25+11\sqrt{5})}a^{3}=$$

$$[A-B-C+D]a^3;$$
 en donde

$$A = \frac{\sqrt{3}}{9} \left(11 + 3\sqrt{5} \right) \sqrt{15 \left(5 + 2\sqrt{5} \right)} = \frac{\sqrt{3}}{9} \sqrt{15 \left(5 + 2\sqrt{5} \right) \left(11 + 3\sqrt{5} \right)^2} =$$

$$=\frac{1}{9}\sqrt{45(5+2\sqrt{5})(121+45+66\sqrt{5})}=\frac{3}{9}\sqrt{5(5+2\sqrt{5})(166+66\sqrt{5})}=$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{5}\times2\left(5+2\sqrt{5}\right)\left(83+33\sqrt{5}\right)=\frac{1}{3}\sqrt{10}\left(415+166\sqrt{5}+165\sqrt{5}+330\right)=$$

=
$$\frac{1}{3}\sqrt{10(745 + 331 \sqrt{5})}$$
 siendo 331, primo $\sqrt{745^2 - (331 \sqrt{5})^2} = 7220$

Ignalmente

$$B = \frac{\sqrt{3}}{9} \left(11 + 3\sqrt{5} \right) \left(5 + 2\sqrt{5} \right) = \frac{\sqrt{3}}{9} \left(55 + 15\sqrt{5} + 22\sqrt{5} + 30 \right) = \frac{\sqrt{3}}{9} \left(85 + 37\sqrt{5} \right$$

CEL

76 mg - 1 15

Análoga mente

$$C = \frac{\sqrt{3}}{9} \sqrt{15(5+2\sqrt{5})} \sqrt{6(25+11\sqrt{5})} = \frac{\sqrt{3}}{9} \times 3\sqrt{10(5+2\sqrt{5})(25+11\sqrt{5})} =$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{10\left(125+50\sqrt{5}+55\sqrt{5}+110\right)}=\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{10\left(235+105\sqrt{5}\right)}=$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{30\times5(47+21\sqrt{5})}=\frac{5}{3}\sqrt{6(47+21\sqrt{5})}=\frac{5}{3}$$
 nendo

$$47^{2} - (21\sqrt{5})^{2} = 2^{2}, \quad \text{zera}' = \frac{5}{3}\sqrt{6}\left(\sqrt{\frac{49}{2}} + \sqrt{\frac{45}{2}}\right) = \frac{5\sqrt{6}}{3}\left(\frac{7}{\sqrt{2}} + \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{5\sqrt{6}}{3}\left(\frac{7}{\sqrt{2}} + \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=\frac{5}{3}\left(7\sqrt{\frac{6}{2}}+3\sqrt{\frac{30}{2}}\right)=\frac{5}{3}\left(7\sqrt{3}+3\sqrt{15}\right)=\frac{35\sqrt{3}}{3}+\frac{15\sqrt{15}}{3}$$

y final mente

$$D = (5 + 2\sqrt{5}) \sqrt{6(25 + 11\sqrt{5})} \times \frac{\sqrt{3}}{9} = \frac{\sqrt{3}}{9} \sqrt{6(25 + 11\sqrt{5})(5 + 2\sqrt{5})^2} =$$

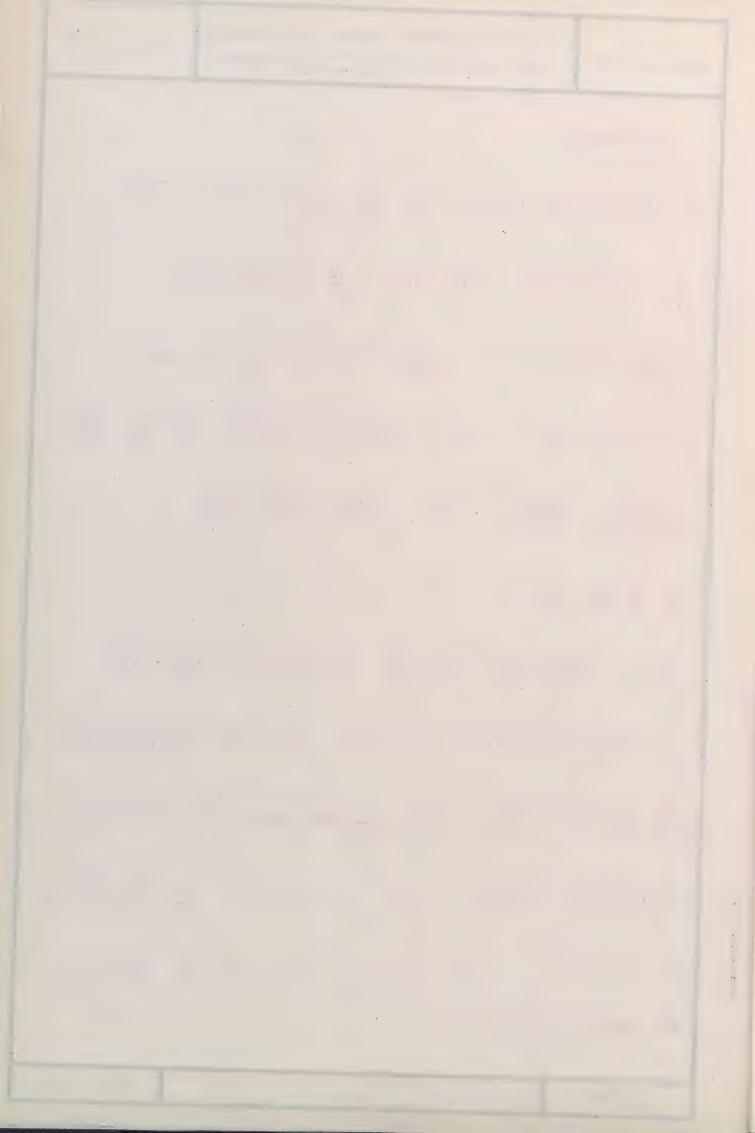
$$=\frac{\sqrt{3}}{9}\sqrt{6(25+11\sqrt{5})(25+20+20\sqrt{5})}=\frac{\sqrt{3}}{9}\sqrt{6(25+11\sqrt{5})(45+20\sqrt{5})}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{9}\sqrt{30(25+11\sqrt{5})(9+4\sqrt{5})}=\frac{1}{9}\sqrt{90(225+99\sqrt{5}+100\sqrt{5}+226)}=$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{10(445+199\sqrt{5})}=(199 \text{ es primo } q 445^{2}-(199\sqrt{5})^{2}=20$$

42 < 20 < 52) De los valores autériores re deduce

la expresion final.



$$V_2 = (A + D - (B + C))a^3 = (\frac{\sqrt{10}(745 + 331\sqrt{5})}{3} + \frac{\sqrt{10}(445 + 199\sqrt{5})}{3}$$

$$-\left(\frac{85\sqrt{3}+37\sqrt{15}}{9}+\frac{35\sqrt{3}+15\sqrt{15}}{3}\right)a^{3}=\left(\frac{\sqrt{10}(745+331\sqrt{5})}{3}+\frac{\sqrt{10}(445+199\sqrt{5})}{3}\right)$$

$$=\frac{85\sqrt{3}+37\sqrt{15}+105\sqrt{3}+45\sqrt{15}}{9}a^{3}=$$

$$= \left(\frac{\sqrt{10}(745 + 331\sqrt{5})}{3} + \frac{\sqrt{10}(445 + 199\sqrt{5})}{3} - \frac{190\sqrt{3} + 82\sqrt{15}}{9}\right) a^{3}$$

il viumen total V del poliedro estudiado, será peres

$$V = V_1 + V_2 = \frac{10\sqrt{3} + 2\sqrt{15}}{9} a^3 + \left(\frac{\sqrt{10}(745 + 337\sqrt{5})}{3} + \frac{\sqrt{10}(445 + 199\sqrt{5})}{3}\right)$$

$$-\frac{190\sqrt{3}+82\sqrt{15}}{9}a^{\frac{3}{2}}=\left(\frac{\sqrt{10}(725+331\sqrt{5})}{3}+\frac{\sqrt{10}(445+199\sqrt{5})}{3}+\frac{\sqrt{10}(445+199\sqrt{5})}{3}+\frac{\sqrt{10}(445+199\sqrt{5})}{3}\right)$$

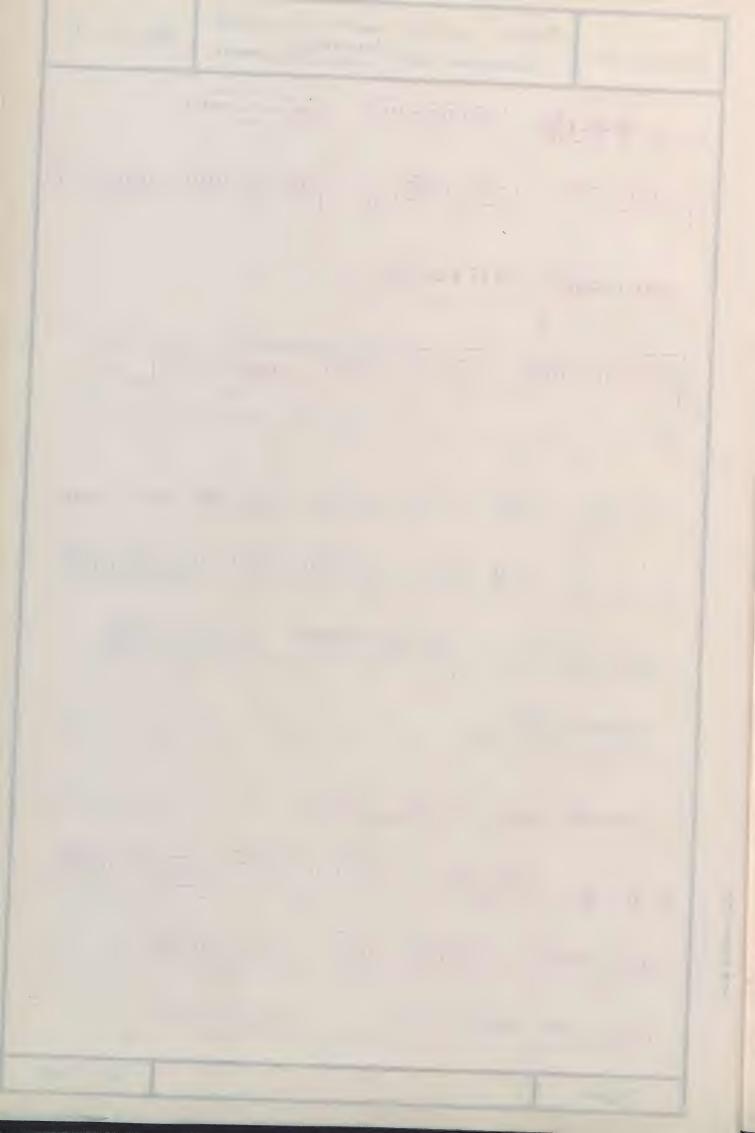
$$-\frac{10(18\sqrt{3}+8\sqrt{15})}{9}$$

Desarrollo del calculo auterior:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{10 \ \sqrt{3} + 2 \ \sqrt{15}}{9} a^3 + \left(\frac{\sqrt{10} (745 + 331 \ \sqrt{F})}{3} + \frac{\sqrt{10} (445 + 199 \ \sqrt{5})}{3} \right)$$

$$-\frac{190 \sqrt{3} + 82 \sqrt{15}}{9} a^{3} = \sqrt{\frac{10 (745 + 331 \sqrt{F})}{3}} + \sqrt{\frac{10 (445 + 199 \sqrt{F})}{3}} + \frac{1}{3}$$

16 - 5 - 72



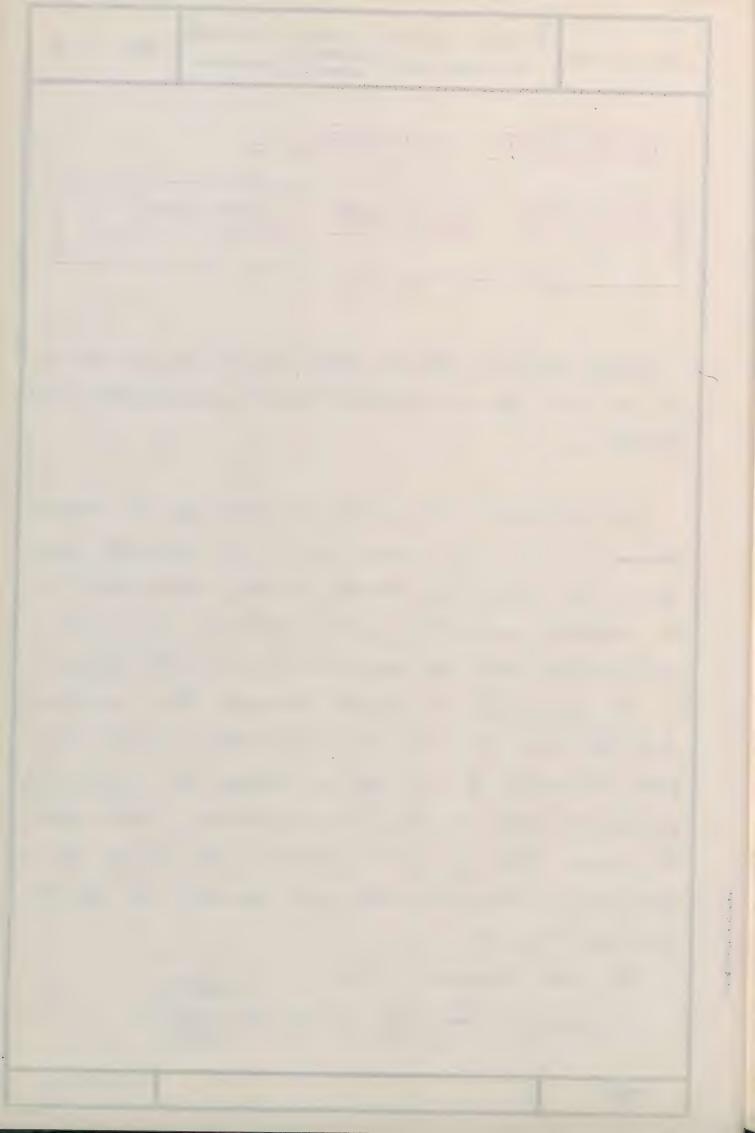
$$= \left(\frac{\sqrt{10}(745 + 331\sqrt{5})}{3} + \frac{\sqrt{10}(445 + 199\sqrt{5})}{3} - \frac{10(18\sqrt{3} + 8\sqrt{15})}{9}\right) \alpha^{3}$$

Arrilo rectelino 20" del diedio formado en la enterneción de una cara del dodecardo, con la correspondiente icinardis

En la lamina 24, podemos comprobar que el árigulo formado por la cara 21-22-23-24-25 del dodecardio requilar, y la 1-5-6 del icosaedro cegular, viene dado en su verdadore magnitud en la projección en I. y a que ambes caras son jespendiculores a diche plane I. Por consignante, el asegnolo burcado 20 es supermun-

taris del que forma la cara triangular 1-5-6 un el plans horizontal II, el curi e deduce de la piramude sutagend que se forma en el vértice 1 del certaldro, mya altera 9 y la apotema h ou su luis un intetos de un trianques rectarmos concerdo (vor lam. 5, Joranulas 50 g. 51)

Dri pues, tendremos que 20 = 7 - are 19 = 17 - arc. \$



= T. - arc. tg (3-15)

Desarrollo del calculo auterior:
$$\frac{1}{5} = \frac{g}{h} = \frac{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} l_{20}}{\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}} l_{20}} =$$

$$=\frac{1}{5}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\cdot\frac{5+2\sqrt{5}}{20}=\frac{1}{5}\sqrt{\frac{2(5-\sqrt{5})}{5+2\sqrt{5}}}=\frac{1}{5}\sqrt{\frac{2(5-\sqrt{5})}{5+2\sqrt{5}}}=$$

$$= \frac{1}{5} \sqrt{\frac{2(5-\sqrt{5})(5-2\sqrt{5})}{25-20}} = \frac{1}{5} \sqrt{\frac{2(25-5\sqrt{5}-10\sqrt{5}+10)}{5}} = \frac{1}{5} \sqrt{\frac{2(35-15\sqrt{5})}{5}}$$

=
$$\frac{1}{5}\sqrt{2(7-3\sqrt{5})} = \left(\text{niendo} 7^2 - (3\sqrt{5})^2 = 2^2\right)$$

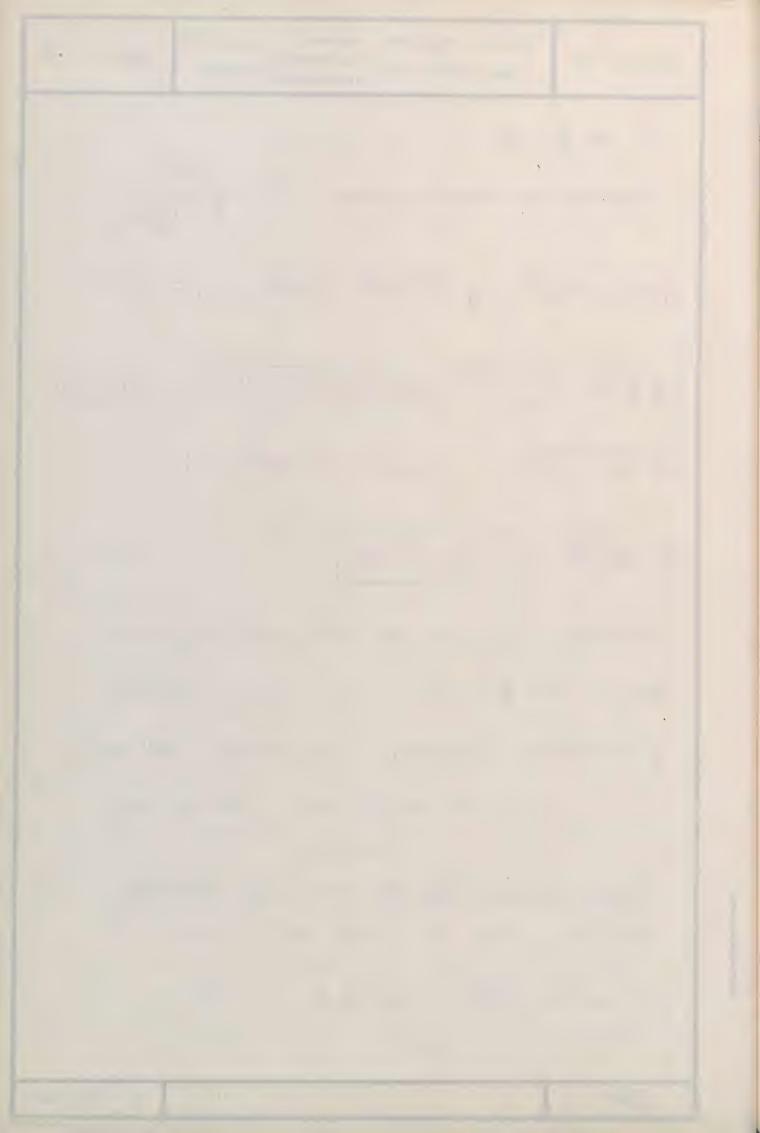
$$=\frac{1}{5}$$
 $\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{9}{2}}-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)=\sqrt{\frac{1}{5}}\left(3-\sqrt{5}\right)$

El calculo numérico de "20" es el signiente:

3 - 1 3 0, 76 39 32

20 = 180° - 37° 22' 38.5" = 142° 27' 21,5"

Angulo rectilines "2 9,2" del diedro del dodecaedro (ver lan. 4, form. 34) 2 9,2 = 116° 33' 54,2"



Angulo rectilione "2420" del diedes del insaertes

(rer lam. 5, form. 47) 2"420" = 138° 11' 22,8"

seu $\Psi_{20} = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{6} = 0.93$ 41 72...

CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
226 (₁₂	$\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}$ a	0,71 36 44a
227	√10 × (5 = √5) a	1,05 14 62a
228 f	$3\sqrt{10+2\sqrt{5}}-(3\sqrt{3}+\sqrt{15})$	0, 39 05 90a
229	$\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}-\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{30}}\right) a$	0, 33 22 56a
230 h	$\left(1-\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right)Q$	0, 20 53 46
231	$5(18\sqrt{3}+6\sqrt{15}-\sqrt{10(25+11\sqrt{5})}-3\sqrt{2(25+11\sqrt{5})}a^{2}$	11, 32 85 41a ²
232 V	$ \left(\frac{\sqrt{10} (745 + 331 \sqrt{5})}{3} + \frac{\sqrt{10} (445 + 199 \sqrt{5})}{3} - \frac{10 (18 \sqrt{3} + 8 \sqrt{15})}{9} \right) \stackrel{3}{a} $	3,00 07 58Q ³
233 2 O	20 = T - arc tg (3-Vs)	142° 37′ 21,5″
234 2 4	$sen \ \varphi_{12} = \sqrt{\frac{5 + vs}{10}}$	sen $\Psi_{12} = 0.85 \ 0.651$ 2 $\Psi_{12} = 116^{\circ} \ 33' \ 54.2''$
235 2 4 ₂₀	$son \frac{9}{20} = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{6}$	sen $420 = 0.93$ 41 72 2 $420 = 138^{\circ}$ 17' 22.8"

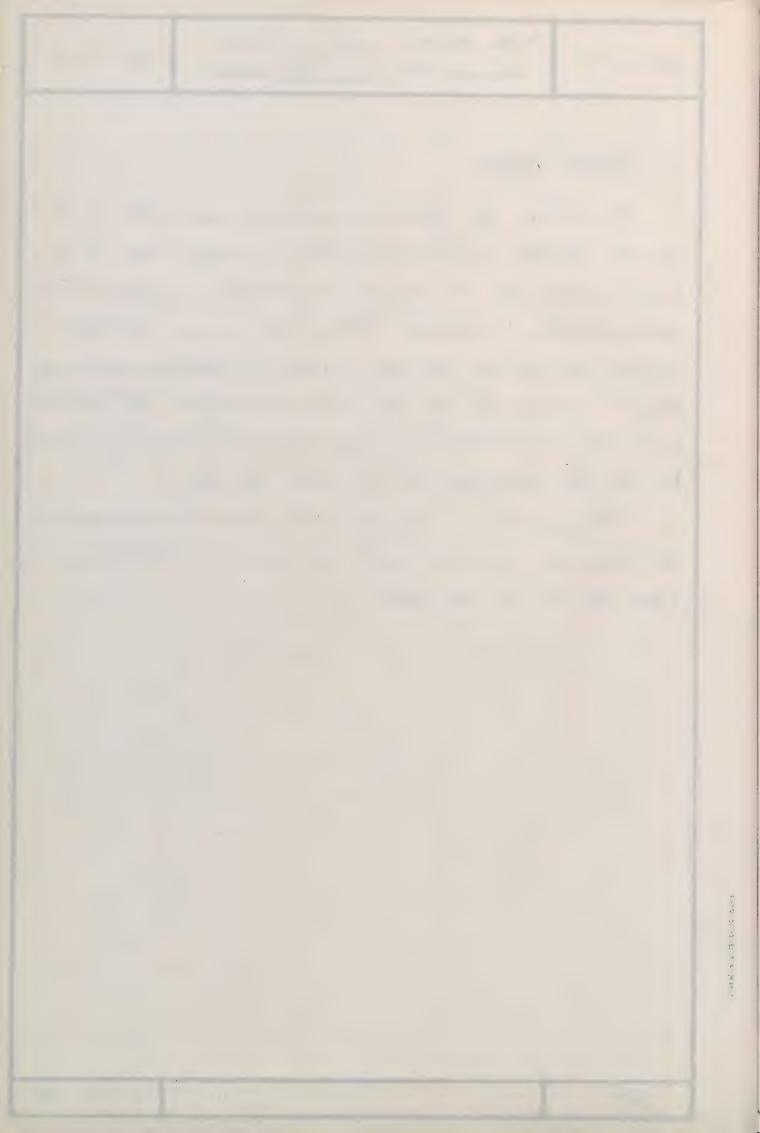


UNE A4 210 X 29

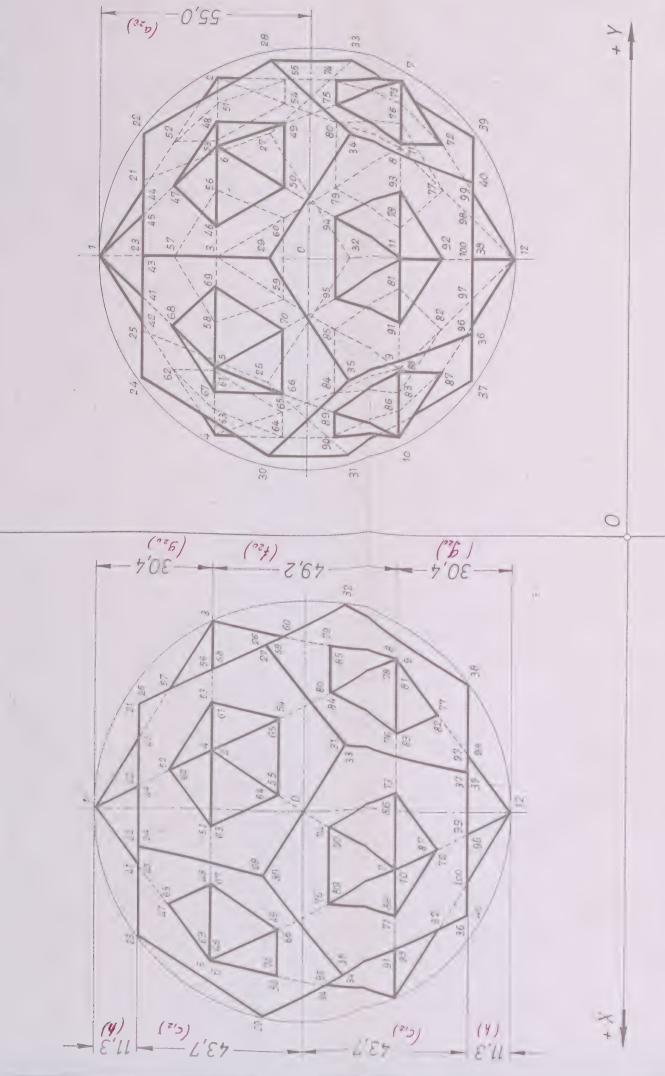
FIGURA CORPÓREA

Para obtener esta figura se construye previamente el dodecardro cegular de 39,3 mm de lado, en cuyas caras se dibujara previamente la base de la piramide complementaria
correspondiente al icosardro. Dicha base es un pentagono
cegular de 21,5 mm de lado, siendo el radio de su circunferencia circumscrita de 18,3 mm.; es pentagono está colocado
en la cara del dodecardro con su centro coincidente, sus virtices en las mediatrices de los lados de esta.

Porte vior mente se acoplarain a las caras del dedecado las desce piramides formadas cada uma por cinco teránquelos esas láteros de 21.5 mm de lado.



Z+



ENUNCIADO

proyecciones desde el centro de dicha ellos las de un dodecaedro y un icosaedro reintersección de esfera circunscrita común, siendo Representar por el método gráfico esfera, y sobre ésta, de los centros gulares recíprocamente conjugados vértices de cada uno de poliedro resultante de la analítico en los planos caras del otro. de las los

€'6€

BJ SIL

(812)

(227)

de e coordenadas del centro son: 0 (72, 72, 85) mm y 55 mm. de la misma Las dio de esfera

esca-Dibujar en formato A3v

	ਰ	-
	-	118
(01	f f f	
111	1	
VERTICES	1	
\subseteq	- 1	
-	1	
001		
	1	
5	1	
	8	
ш	1	
0	1	
	1	
	1	
4	1	
0	1	1
UMERACIÓN	0	***
0	1-	
2	Ō	
111	9	
7	0	- (
-	5	7
	Icosaedro	
Z	0	(

1+

100

Puntos de intersección___

07

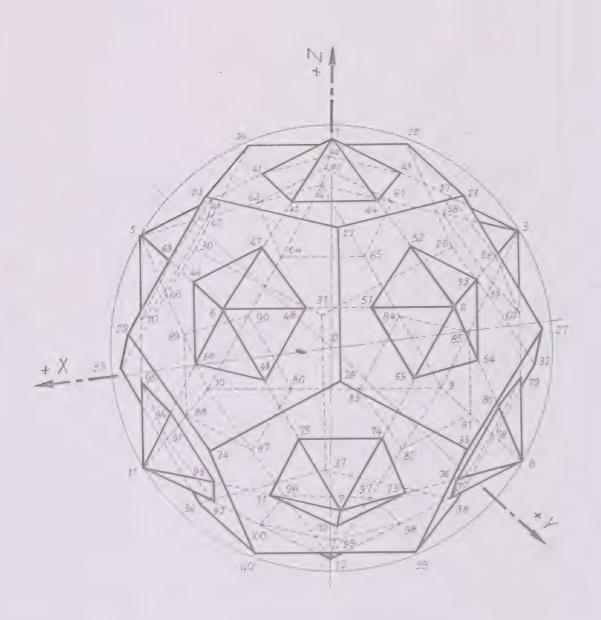
12

Califi-	cación		
Entregada		the state of the s	
Propuesta De entrega Entregada		the same of the sa	
Propuesta			
	Fecha:	Alumno.	Escala

ela 0	regulares convexos conjugados
Escuela	SOX
(firma)	conve
Califi-	res
Propuesta De entrega Entregada Califi-	regula
De entrega	
Propuesta	Poliedros

Lámina 24 Curso 19







ENUNCIADO

to plane. I. I. . In, it produce and the series of an extra de la mora in manufación a cité, or tra ella, de centras de naciona in ada cara. In misures a cité, or a contras de centras de naciona como a cité, or a contras de centras de naciona como a contras de decha cara.

Las cocraenación del centro de a respectivo de la comunicación de la c

temps en la rate de V j a como 111.

 $\frac{52\pi c}{a_4} = 55 \text{ mm}.$



2-6-72

capresentación de los poliedes derivados de los cinco regulares convexos, signiendo la ley de formación que se
expresa en el enunciado para el derivado del tetraedro.

Esta ley de formación, común para todos ellos, consiste
en detener un poliedro de otro regular dado seguin el
proceso aigniente:

- 1º1 Erasas la esfice circumscrite al pétierre regular dute.
- 2°) Proyectar desde el centro de este, g sobre su esfera circumscrita, los centros de los poligonos de todas las caras de dicho poliedro regular dado.
- 3°) Unir los puntos obteridos en el proceso 2°, con los virtices del polígano de su sara correspondiente.

De la ley de formeries expuesta, se describe la signicates propiedades comunes a los eineo poliedes derivados:

a) Coiras las casas at propos de casas un recordo, pho-



En efecto, al unir los puntos obtenidos por el proceso 2º, con los virtices del poligono de cada cara del poliedro regular dado, se forma en cada una de ellas una piramide cecta regular de tantas caras laterales como lados tenga dicesa polinano. Endas las pisamides seran iquales q por consiquiente todo. las caras del policidos derivado seran a su wer access,

Exercise la president de que las caras adjacentes de des pinamides contiguas con arista comin en una arista del policelo repulso dado, puedan o mo estas en un crismo paro. En el primer case, cada dos caras trian quelares contiguas viere la arista del policidio remens, re commerten en una sola cara con la forma de combo, ya que sus cuatro lados serian ignales.

Li llamamos C', V', 2 An el minnero de caras, vértices o aristas del policais rescular dado o C. V A los in policaro derecado de isma espera circunycrita, re verificara, bajo el supuesto de ser todas sus careas triangulares, que

 $C = n C_n$

[1]

puests que cada cara del potiedro cegular dado, es base de ma piramide recta regular de "n" caras to naly, et minuero de la la del poligono de en las.

Cambien tendremos que





 $V = V_{p} + C_{p}'$

[2]

ya que a mais de los virtices del poliedro dado, se originau muevos vértices, uno por cada cara de dides poliedia.

I finalmente se veri a que

 $A = A_n + n C_n'$

[3]

fuerto que a mas de las aristas del polículos dade ne originan muestas aristas en las caras laterales de las piramides que se forman en cada cara del mismo, cuyo mimero es ignal al de lados del poligono base de dicha piramide.

In mando as ignaldades [1] ; [2], ; restructo la [3], tendremos

 $C + V - A = nC'_n + V'_n + C'_n - A'_n - nC'_n = C'_n + V'_n - A'_n$ y aptranto el teoreme de Enter al prindre convesco dado, se verificara que

 $C'_n + V_n - A'_n = 2$

por lo que un el potente descente tamenen se rificara dicho teorema, siendo pues

C + V - A = 2

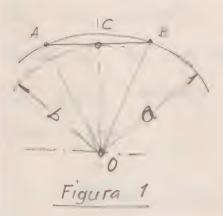


aun enando este policáro derivado no sea converco, como veremos ocurre en aljunos casos.

b) Éxiste una esfera, concentrica con la circumerita al poliedro derivado, que es tangente en su pento medio a todas las arietas de ignas lengand

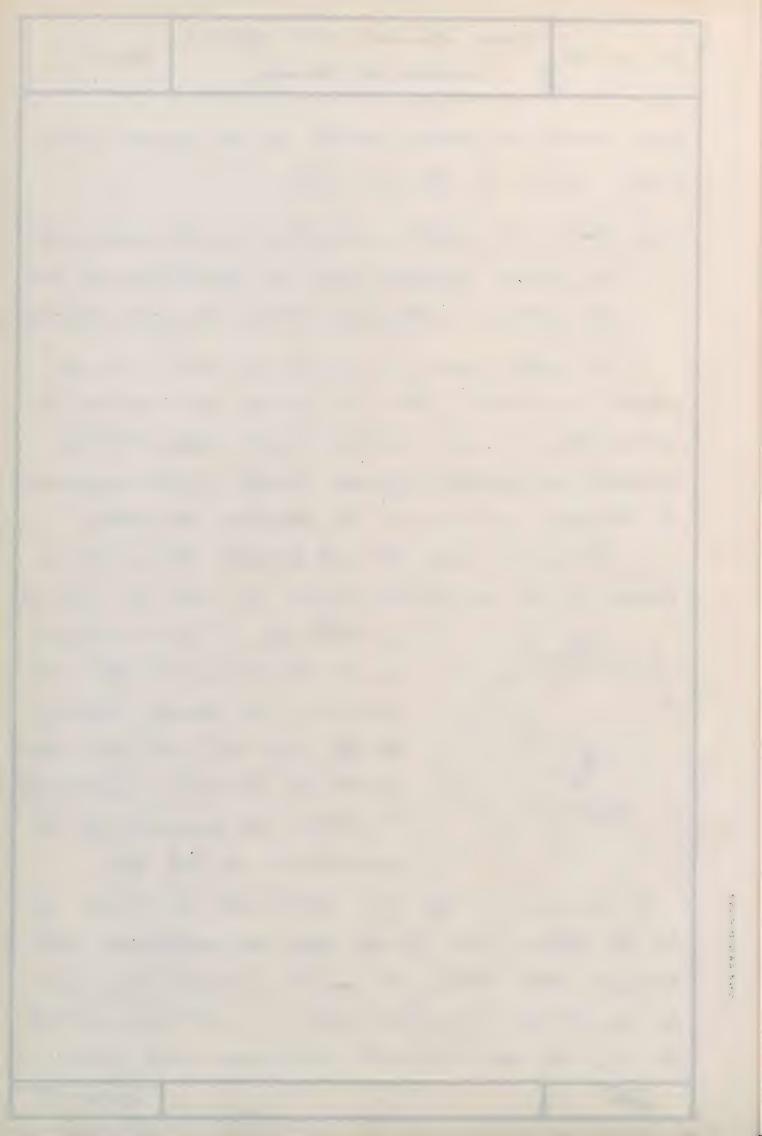
En efecto, regun la ley de formacion de estos poliedros derivados, todos los vertices del mismo re encuentran en una misma estera que es la circumscrita al poliedes regular dado, y por consigniente también circumserita al poliedro derivado.

Cualquier arista de este poliedro tiene sus esetremo A g B en dicha esfera de radio a (fig. 1).



g centro O. Li mimos \$ 1 B con O, el triangulo AOB sua isonceles y el punts medio c de 18 sera el piè de la perpendicular trasada a AB desde O (altura del triangulo AOB, cocres pondiente al lado 13)

Li consideranos que la avista AB se mueve sobre la esfera de forma que ens extremos esten siempre votre ella el punto E equidistara siempe de 0 la ansimilar oc = b ; por consignient el l.g. de rus infinites posiciones serà una es-



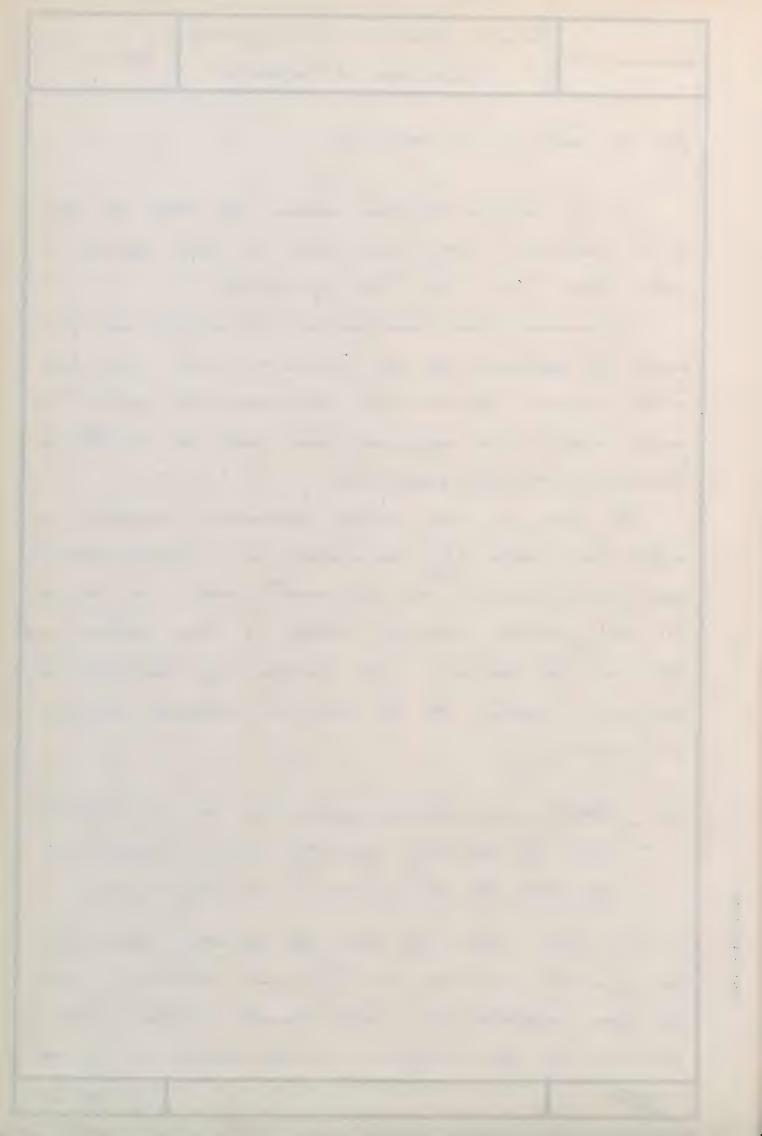
En todo poliedro derivado existen dos clases de aristas de déferentes magnitudes entre si, pero ignales en cada clase, que con las signientes:

ba primera clase comprenden las avistas que forman el contorno de cada piramide recta una base es el poligano regular de cada cara del policido regular dado; la regunda clase son las aristas latenales de dichas piramides.

Asi pues, en todo poliedro derivado, existirá una esfera de radio b, concentrica con la circumscrita, que serà tangente en su punto medio a las aristas del policaro regular dado, y stra esfera ana loga a la auterior, de radio be tanquete en su punto onedio a las acustas laterales de la piramide.

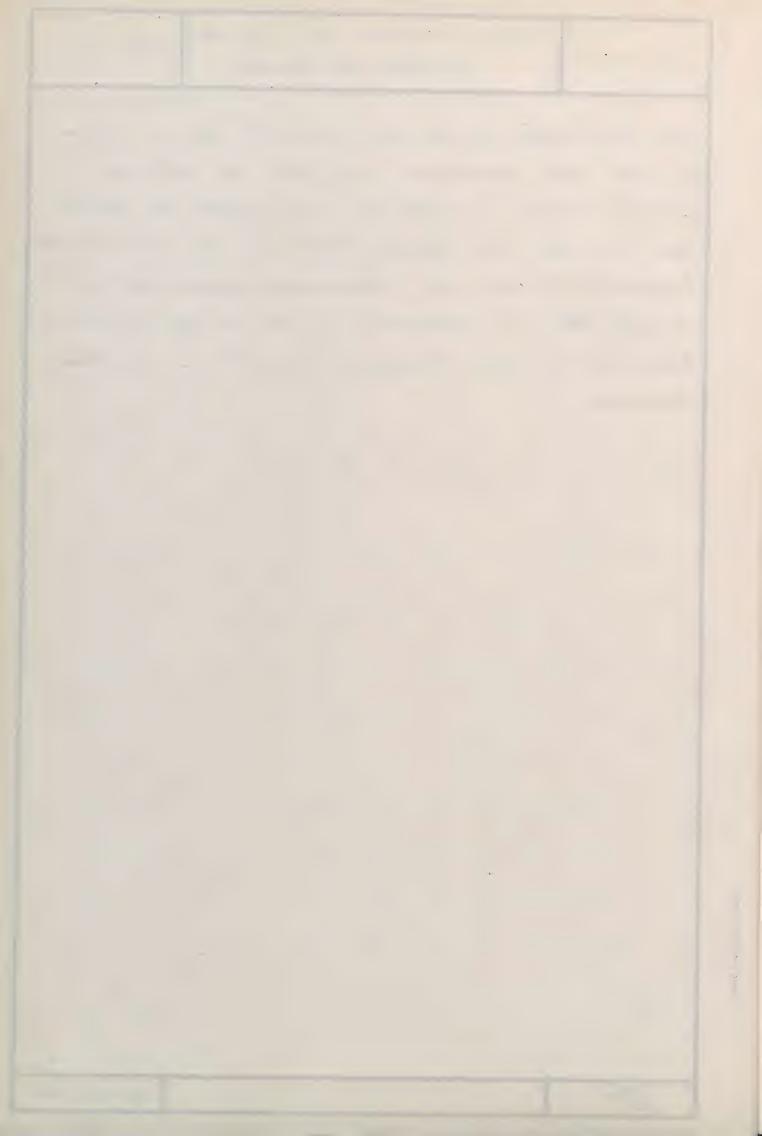
c) Esceste una esfera, concentrica con la circunscrita al poliedio derivado, que es tangente a las caras de este (inscrita en el mismo)

En electo, totas las caras del priedre deriva de son ignales, pudiends ser trianquels isonceles o romebe (over proported a). Ambas figuras tienen al me-(no) un eje de sometria y sus vértices en la este-



aa circumscrita, to wal nos demuestra que al aplicar a ma cara enalquiera un giro con centro en O, podemos obtener siempu la superposicion de didra cara con otra del poliedro derivado. El ortocentro del tricinquelo de cada cara formanecera equidistante de O durante todo el aconsmissió y será el punto de contacto de la enfera tangente inscrita en el poliedro derivado.

(signe en hoja 7)



CALCULO DE LOS ANGULOS RECTILÍNEOS LE LOS MEDRO. DE LAS

En el poliedro derivado solo escisten dos clases de diedros, ignales entre se en cada clase; estas son las signica-

- a) Diedros que se forman en els caras trianquelares contignas con arista común a las del poliedro requelar dado, j
- b) Diedros que se forancen en dos caras trianquelares contiguas en las aristas de las piramides rectas requidares que se forman en cada cara di dicho poliedro regular dado.

Para el desarrollo de los cálculos anteriores, emplearemos da significante momenclatura, análoga a la de las lámimos mas anteriores:

n = Nimero de caras del poliedro regular dado an = Radio de la esfera circumscrita a didro poliedro.

ln = bado del poliedro regular dado

6, a Radio de la estera tangente a las aristes del polie-

(2-



15.

5)

16)

¥

9,

14

(13)

11 ,

10

(72

UNE A4 210 X 2

b₂ = Radio de esfera tangente a las avistes de las fir cámides cretas cuyas bases son caras del miemo. C_n = Rodes de la esfera inscrita en el polisdos regular

C₁ = Radio de la esfera inscrita en el policido derivade d_n = Radio de la circumferencia circumscrita al poliçomo regular de una cara del policaro dado.

kn = Apotema del poliçono regulas del mismo, o tam. Even made de en circumperencia circumscrita.

24, = Diedro del poliedro regular dado

24n = Diedro de dos caras del poliedro derivado en la arista del poliedro dado.

Br = Indis formado por una cara tateral de la piràcuide y su base.

2 /n = Diedro de des caras de la piramide.

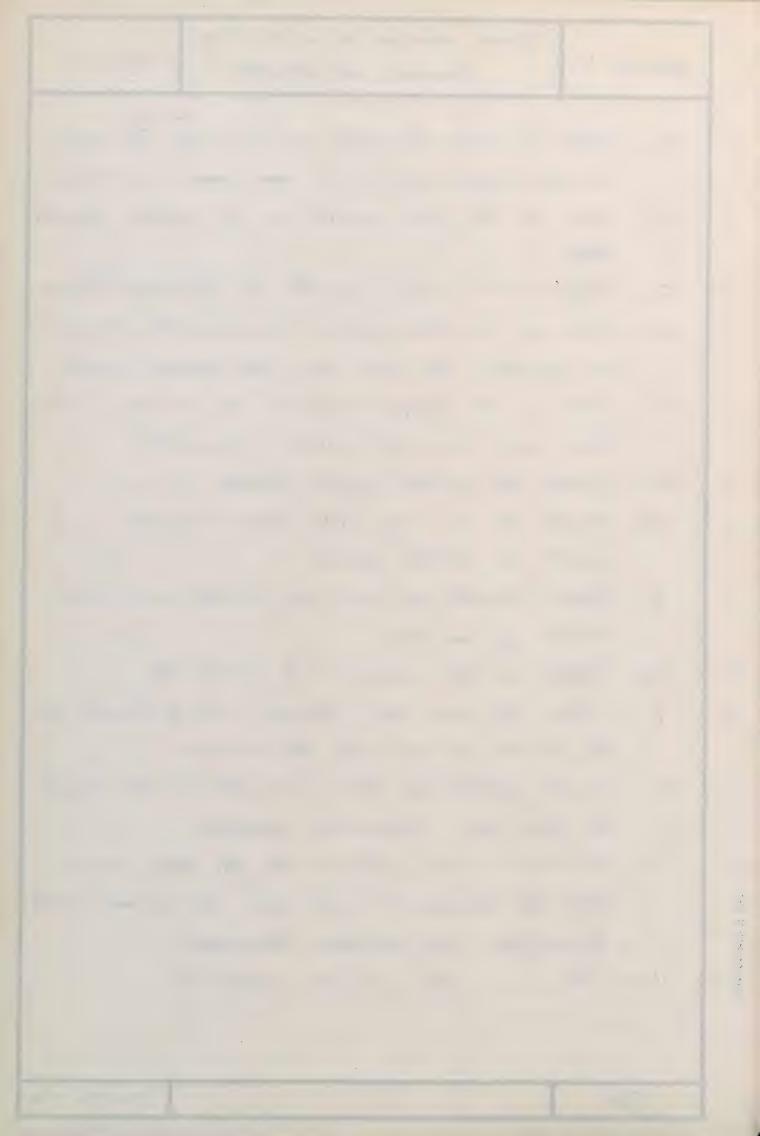
p = Altura de una cara lateral de la piramide recta formade en cada cara del mismo.

q = Arista lateral de decle piramede à la si ignal de una cara triangular isoscèles

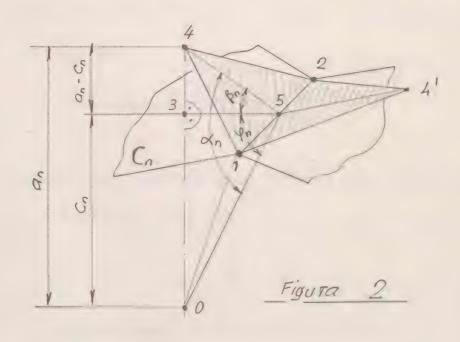
t = Distancia entre extremes de des lades consecutidos del políquio de una cara de potendio dado

S = Inperficie del poliedro derivado

V = Volumen del poliedes derivado



a) Cálculo del diedro que forman dos caras trianqueses del priedro derivado, un arista comun a la del poliedro regular dado.



Lea (fig. 2) 1-2 una ariete del poliedro regular dado, D su contro g 3 el centro de una cara Con de dicho poliedro:

El punto 4, obtenido al proyectar desde 0 2 vobre (signe en hoja 10)



ce de uma de las peramides rectas requirers de la casa. Con, sera el presente ce de uma de las peramides rectas respersos. La aresta 1-2, que uniremos 3 y 4, formandos e el trianquelo 3-4-5, rectangulo en 3, En este triangulo se verificara que

$$\frac{1}{k} \beta = \frac{3.0}{3.5} = \frac{a_n - c_n}{k_n}$$

firma a su me

$$\frac{1}{16} = \frac{3-0}{3-5} = \frac{Cn}{Kn}$$

de suma de les angules. In g B, serà ignal al an-

$$\alpha_n = Y_n + f$$

y de las expresiones autiriores a time

$$t_{\epsilon} \propto_{n} = t_{\beta} \left(\sqrt{2n + \beta} \right) = \frac{t_{\beta} \sqrt{2n + t_{\beta}}}{1 - t_{\beta} \sqrt{2n + t_{\beta}}} = \frac{\frac{C_{n}}{k_{n}} + \frac{a_{n} - C_{n}}{k_{n}}}{1 - \frac{C_{n}}{k_{n}} \times \frac{a_{n} - C_{n}}{k_{n}}}$$

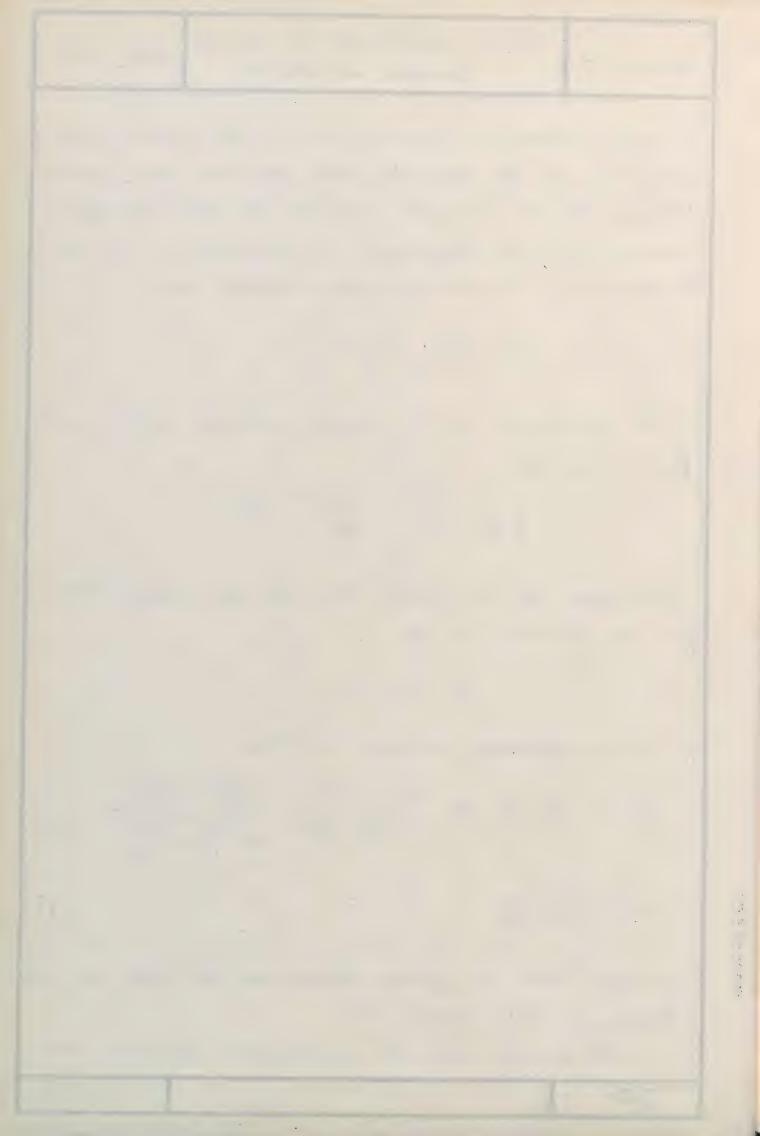
$$= \frac{a_n k_n}{k^2 - a_n c_n + c_n^2}$$

[4]

con enys valor ce puede determinar, en cada caso porticular, el del angulo ×1.

Este angulo de fine la caracteration separat del

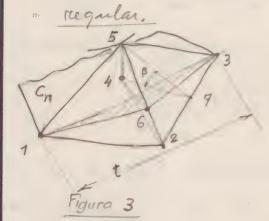
UNE A4 210 X



poliedro dervotado, el enal rera concavo o convesco requin sea a, menor o mayor de un recto.

En el caso particular de que « sea cecto, el poliedro derivado tendrá dos caras laterales en un miemo
plano, es decir, se transformaran éstas en un paralelógramo de la de ignales (cambo). El cuimero de
caras de este istiedos determinado en la esepución [1],
se ceducirá a la cruitad; el de vértices por la esepresión [2] será el crismo y el de aristas por la esepresión [3], quedará ceducida a An = n Ch, por desa parecer las aristas An (son diagonales del combo).

lares contiguas en las aristas de la pirama entre



Jea / fre. 3 | C, ma cara

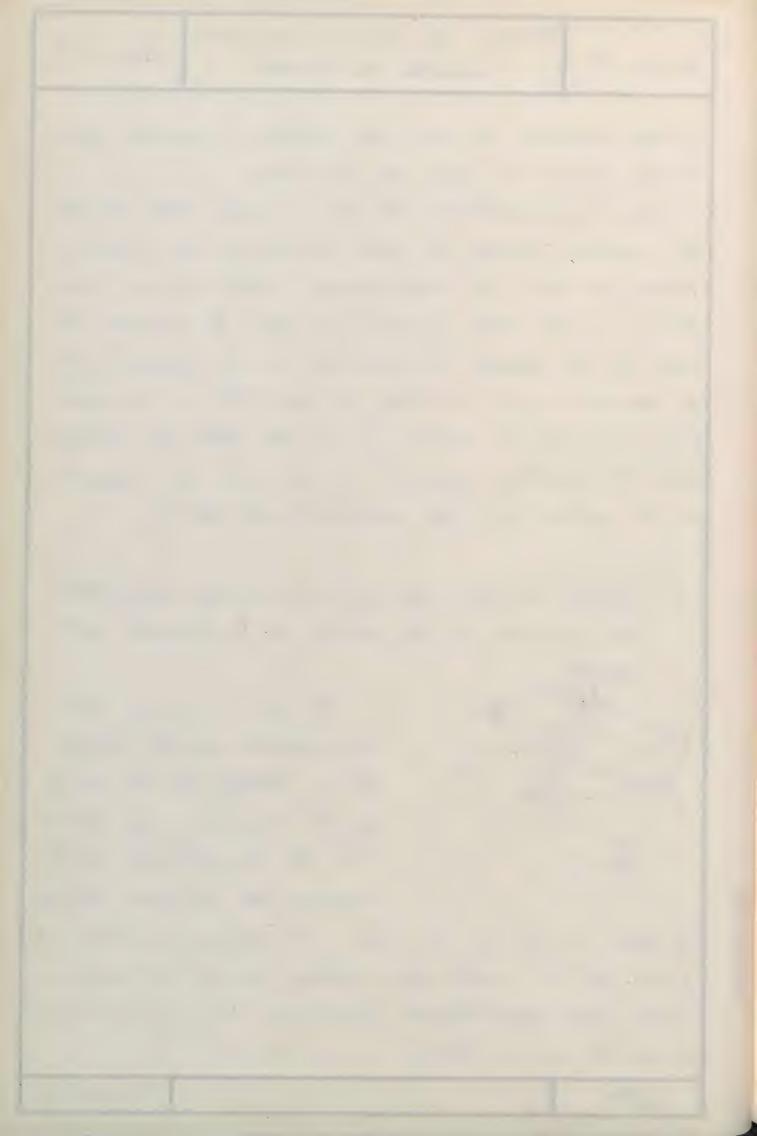
del priedes regular dado,

de n lados; 4 el centro

de la misma y 5 el ver
tice de la piramide recta,

regular de n caras latera-

les que re forma en Cm. Dos lados consecutivos 1-2 g 2-3 de Cm unidos sus extremes con 5, mos seteranimaran dos caras laterales contiguas 1-5-2 g 2-5-3, de asista commin 5-2.



El vetilino de este diedo se puede estener por interreccion de sur plano que pasando por los exetremos 1 g 3 de los dos lados connecutivos 1-2 g 2-3, coa perpendientar a la prieta 5-2,

Jea 6 el punto de initerresción de dicto plans con 5-2; uniendo 6 con 1 g 3 se mos formara el Tricio que isósceles 1-6-3, enyo angulo en 6 será el pedido 27nº

Jana stience su valor, mamos el punto 7, medio del Sado 2-3, son el centro 4, formandose el tracamento 5-4-7, rectangulo en 4 por lo que se verificara que

$$p = 5 - 7 = \sqrt{(4-5)^2 + (4-7)^2} = \sqrt{(a_n - C_n)^2 + k_n^2}$$
 [5]

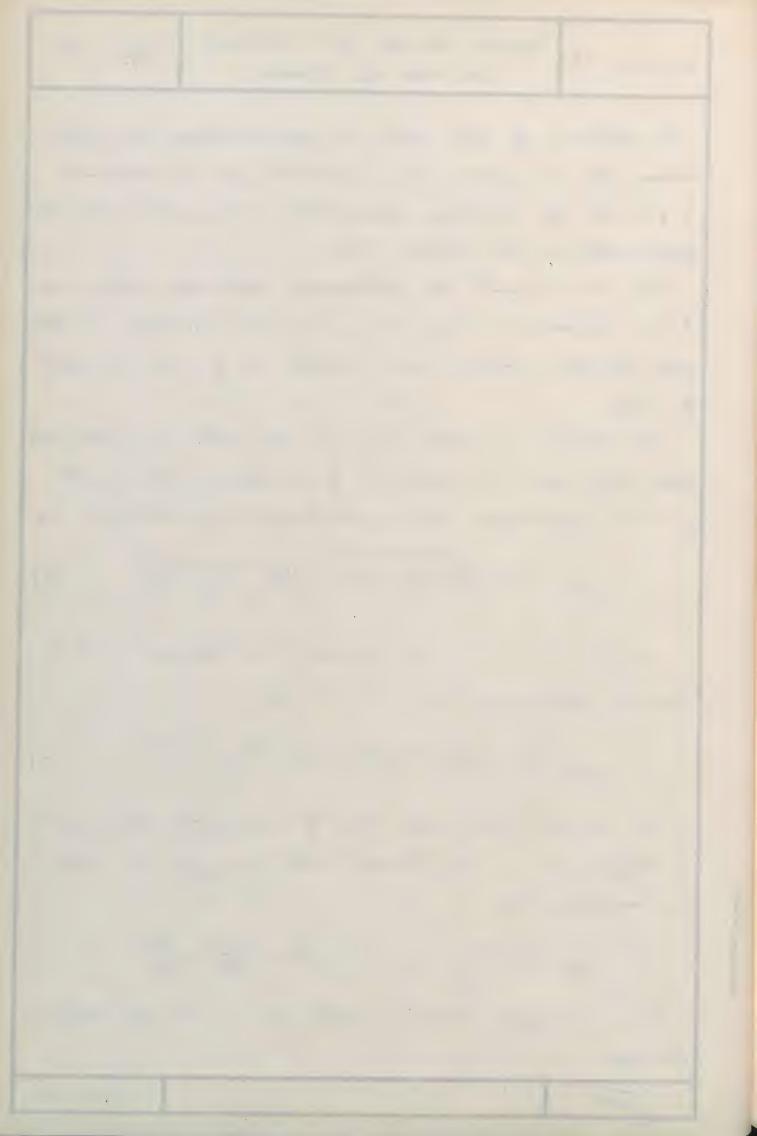
Uniendo 4 con 2, se nos formara otro ticinquelo 5-4-2. También rectangulo en 4, por lo que

$$q = 5 - 2 = \sqrt{(4-5)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{(a_n - c_n)^2 + d_n^2}$$
 [6]

En la cara trianquelar 5-2-3 se puede determinar el angulo en 2 en funcion de p g q , y a que se verificara que

aen
$$(5-2-7) = cos(2-5-7) = \frac{5-7}{5-2} = \frac{6}{9}$$

En el triangulo 2-6-3, rectangulo en C. se verefica-



$$3-6 = (2.3) \times \text{seu}(6.2.3) = \ell_n \times \text{seu}(5.2.7) = \ell_n \times \frac{P}{q}$$

Consideremos finalmente el triangulo isosceles 1.6.3, en el que designaremos por 1 al lato 1.3. El valor del diedro 2 Yn buscado se deduce de la expressión

sen
$$Y_n = \cos(1.3.6) = \frac{\frac{1}{2}(1.3)}{3.6} = \frac{\frac{t}{2}}{l_n \times \frac{p}{q}} = \frac{tq}{2 l_n p}$$
 [7]

c) laboulo del diedro Bo formado por una cara late cal de la piramide y su base.

Réfiriendons a la fig. 3, veus que

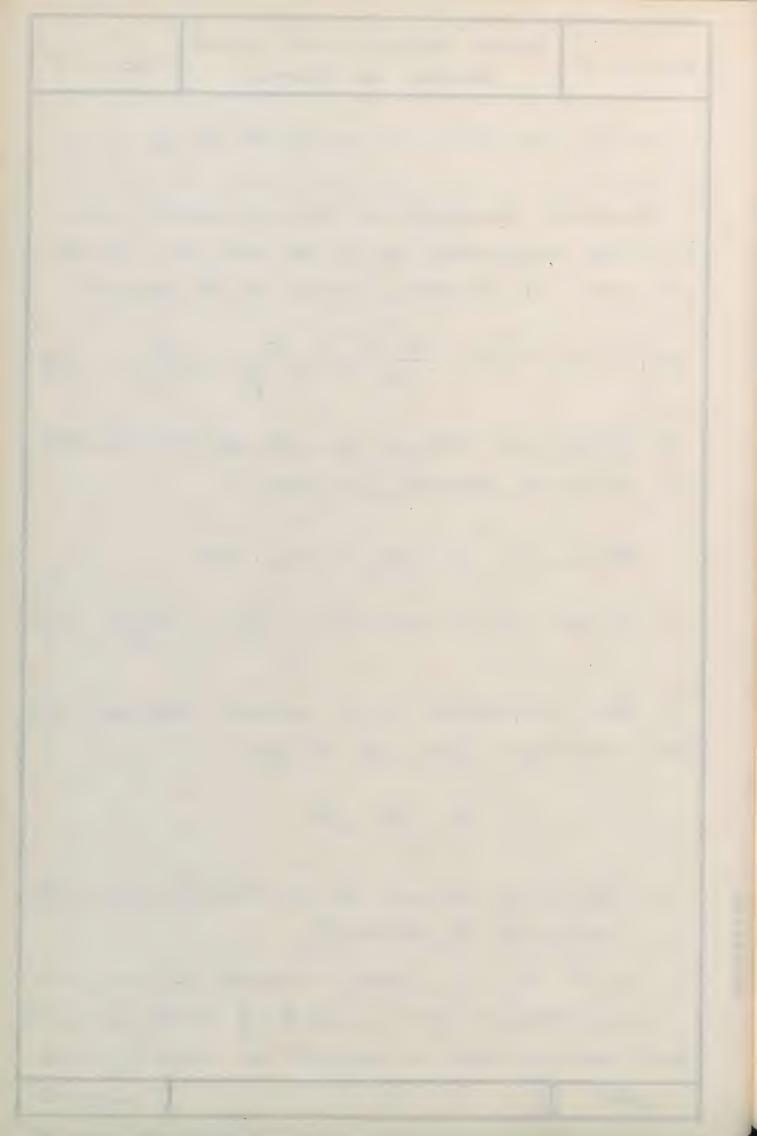
ren
$$\beta_n = ren \left(\frac{5 \cdot 7 \cdot 4}{5 \cdot 7} \right) = \frac{4 \cdot 5}{5 \cdot 7} = \frac{a_n - c_n}{p}$$
 [8]

Como comprobación de los calculos anteriores, deberå verificare (ver fig. 2) que

$$\alpha_n = \psi_n + \beta_n$$

d) Vilento del radio be de la esfera targente a les aristas de la pirámide.

En la figura 2 podemos observar que los puntos 4 contremos de una arista q de la piramide, notre la esfera circuminità re vatro ani pre



consistemente el trianquis 1.0.4 serà isosceles y sur altura desde D cerà perpendicular a la bace 4:1=9 en sur punto medio. Dicha altura serà pues el radio be de la essera pedida; su valor se diduce del trianquis cectanquis di cateto $\frac{9}{2}$ e hipoternica an, por lo que

$$b_2 = \sqrt{(a_n)^2 - \frac{q^2}{4}}$$

[9]

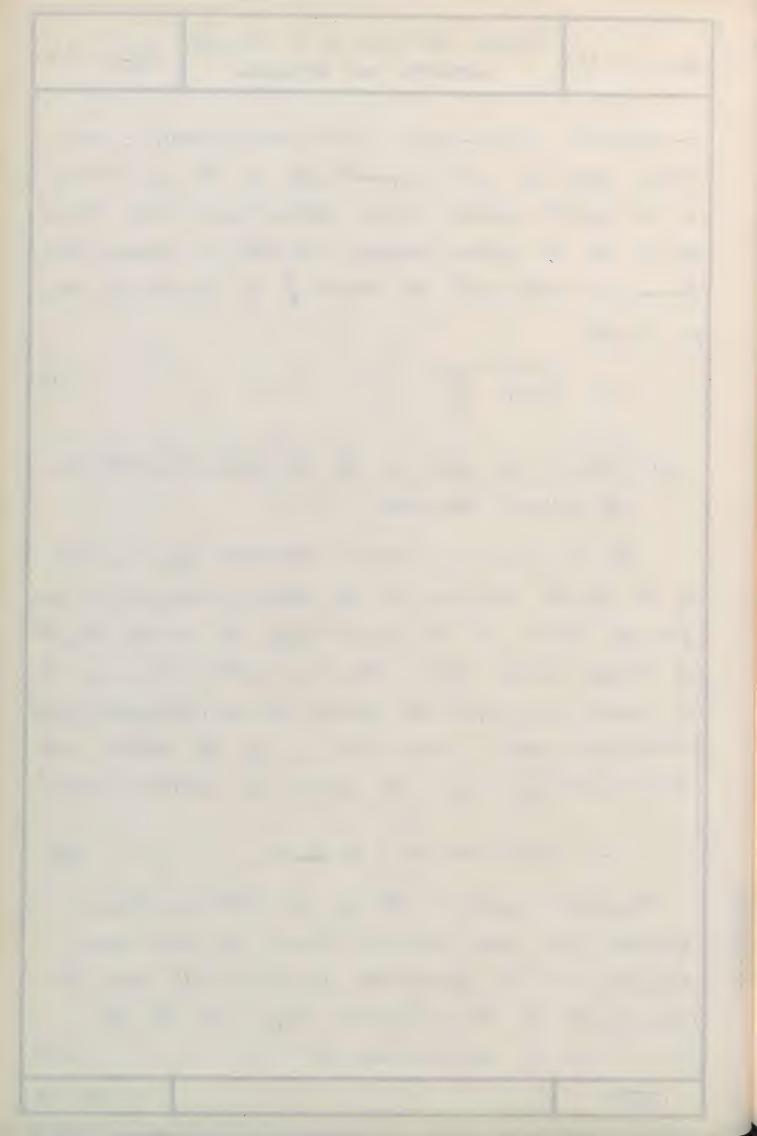
e) baleulo del radio C, de la esfera insenta en el poliedro derivado

En la figura 2 podernos observar que ni 1-2 es la arista comune a des earas trianquelares que forman entre si el ánquelo 2×n los vertices 4,4' de dichas caras estan sobre la esfera circumsorita de cadio an; por otra parte, en el Trianquelo 4-0-5 se verifica que 0-5 = b, y la altura sobre 4-5 desde 0, o sea el radio c, pedido, valdrá

$$C_1 = (0.5) \times ren \propto_n = b, sem \propto_n$$

Sambien podemos obtener el valor anterior operando con uma ariste comuin a dos caras laterales de la peranuide (p.e. la 4.1), que formain entre se el ainque 2 m, por lo que (10')

[10]



debiends verificanse como compostación and

by co on = be an Yn

[11]

Resumen Linal

Las formulas [A] a [10] (010') junto con la [11] de comprebación, nos permiten calcular los elementos fundamientales de los poliedros derivados de
los cinco poledros regulares, obtenidos por el proceso geomietrico detallado ral comienso de este estudio
Diolas formulas son función de los valores 29n,
ln', bn, cn, dn, kn y t, que deberán determinarse
prenamente para cada caso particular, en función del
nadio an del poliedro regular apercado, viviros dato

El estudis se complétare con el calents an area lateral S y volumen V ail poliedes derivads.

Este será el proceso a seguir en el estudio de cada uno de los cimos poliedes derevados de los cegulares.

del " problema.



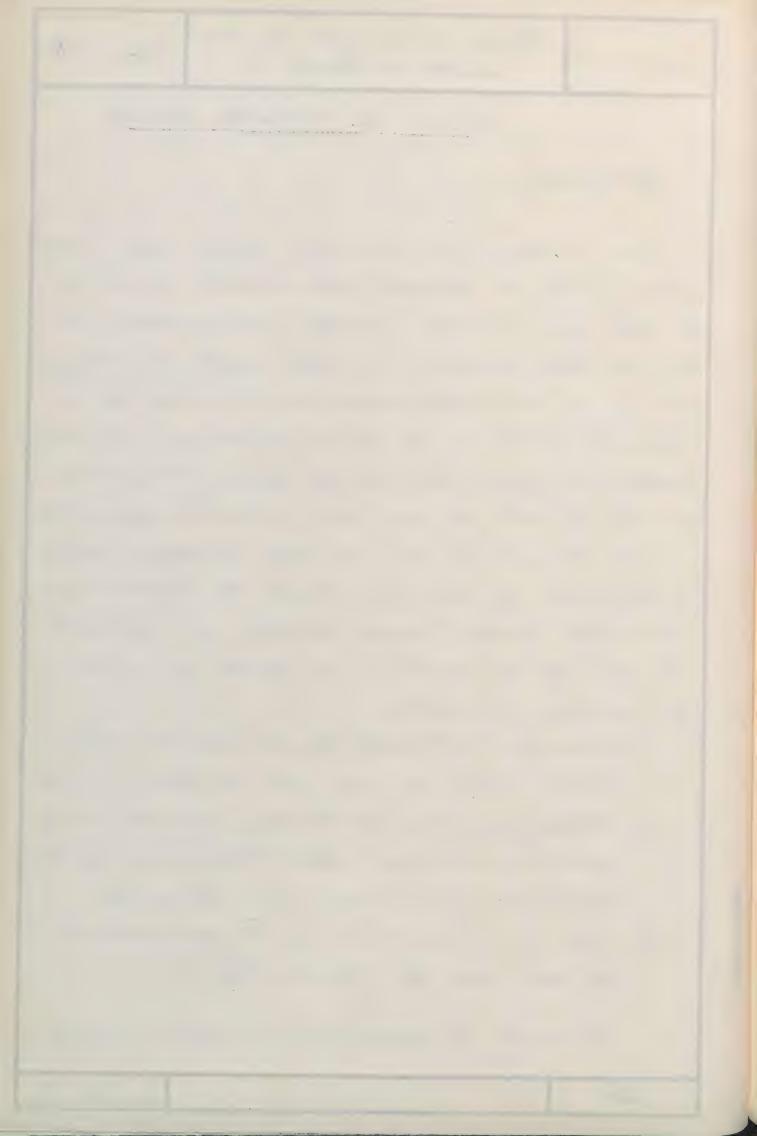
DERIVADO DEL TETRAEDRO REGULAR

PROCESO GRAFICO

Jequin se deduce de las consideraciones anteriores, para la repreuntario prica de cualquier plado derivad do uno requlas dado seguin el proceso indicado en el enunciado, essta
con representar previamente el poliedro regular dato del ejercicio, y a continuación determinar los vértices de su
conjugado inscrito en la orisma esfera que aquiel, colocado de sel forma que resulten diela, vértices alimeados con el centro de una casa y el centro del priedro,
bu el caso particular que vos ocupa, el proceso gráfico
es insmediato, ya que el compugado del tetrado escular es ros tetracedes también regular, esta representación ha sido ya recuelta en el ejercicio de la lámina.
22, uno proceso vos permite:

- 1º l'epresentar el tetraccho regular dado, de mentices.
 1 al 4, inscrito en una esfera de 55 mm de cadio.
- 2° Olteres les virtices del tetracaso compagado 5 al 8, inscrito en la misma esfera (estes virtices se han de corresponder con los 11 al 14 de la lamina 22).
- 3° Unir los vértices 5 al 8 con los correspondientes de cada cara del tetraedro dado.

Il terminar la apresentación de policido desirado.



contiguas y coincidentes con una arista de tetrado dado, estan en el mismo plano, por lo que al aplicar la foirmunda [1] para la diterminación del mimero de caras
del derictorios

este mimero se reduce a la mitad, y par lo tanto este poliedro tendrá 6 caras.

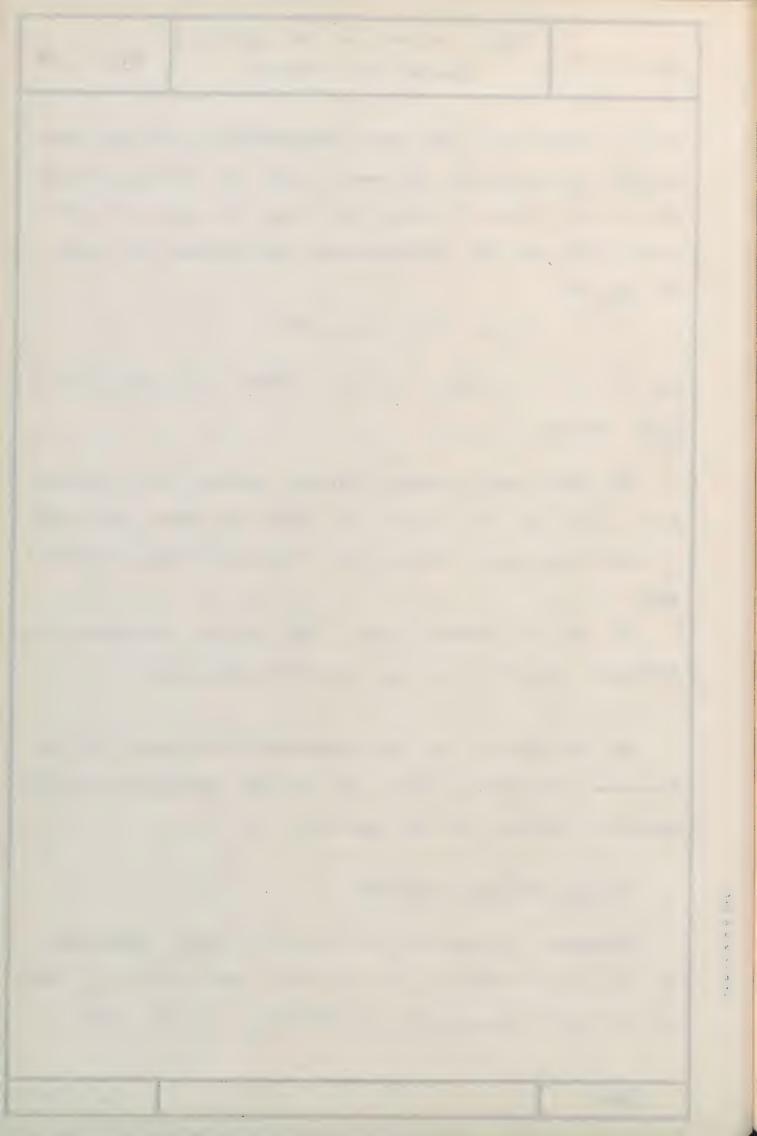
For other parte tambien podemic deducir de la representación final que la áregula de estas seis caras, son rectos, y por consignientes dichas caras (vernebos) serán cuadradas.

De elle se deduce que "El potendro derivado del tetrado regular, es un exaedro regular"

La demostración de esta propiedad la hacemos a continuación analíticamente en el estudio del perceso gráficoanalítico aplicado a este ejercicio.

PROCESO GRAFICO- ANALÍTICO

la culemos anteriores, en función del radio a (dats) de la esfera cucumente al tetraces o recular dade.



Número de caras "n" del tetraedro dado

Radio "a" de la esfera circunscrita al mismo parto del ejercicio).

bado "l" del tetraedro dado

Je deduce de la formula 1, lan, 1

$$\ell_4 = \frac{\mu}{\sqrt{6}} a_{\mu} = \frac{2\sqrt{6}}{3} a_{\mu}$$

Radio "c," de la esfera inscrita al mismo

Le deduce de la formeula 3, lans. 1

$$c_4 = \frac{\sqrt{6}}{12} \ell_4 = \frac{\sqrt{6}}{12} \times \frac{2\sqrt{6}}{3} a_4 = \frac{1}{3} a_4$$

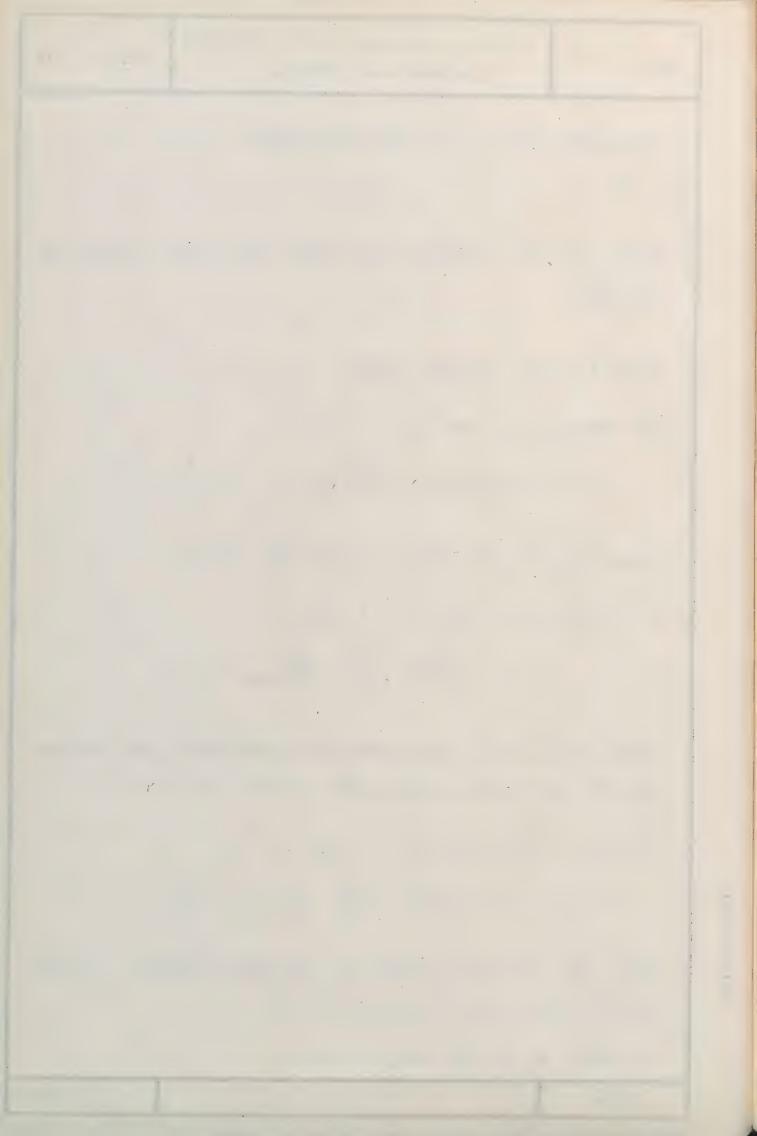
Radio "de la circumperencia circumscrita al pringene regular de una cara del misuro.

Le deduce de la formula 4, lam. 1

$$d_{4} = \frac{\sqrt{3}}{3} \ell_{4} = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{2\sqrt{6}}{3} a_{4} = \frac{2\sqrt{2}}{3} a_{4}$$

Radio "ky" de la commencia inscrita ai policine segular de una cara del mismo (apoterna)

Le denne de la liver la 6, lan. 1



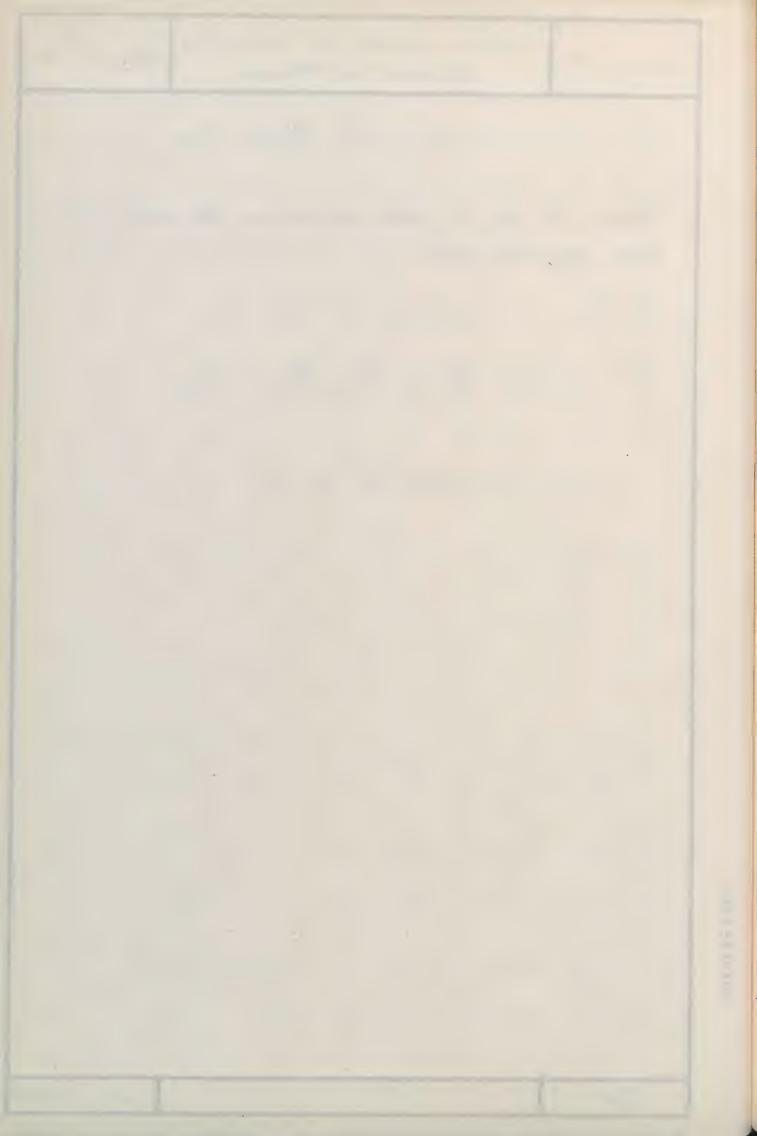
$$k_4 = \frac{\sqrt{3}}{6} \ell_4 = \frac{\sqrt{3}}{6} \times \frac{2\sqrt{6}}{3} \alpha_4 = \frac{\sqrt{2}}{3} \alpha_4$$

Radio "b," de la extera tanquete a las acidas del pohedro acquiar dado.

Le deduce de la famente 2. dans. 1

$$b_1 = b_1 = \frac{\sqrt{2}}{4} \ell_4 = \frac{\sqrt{2}}{4} \times \frac{2\sqrt{6}}{3} \alpha_4 = \frac{\sqrt{3}}{3} \alpha_4$$

I signe on love 201



Angulo rectilines "29," del diedro del mismo

Le deduce de la formula 5, lan. 1

seu
$$\varphi_{\mu} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$
 $2\varphi_{\mu} = 70^{\circ} 31' 43,6''$

los signientes del poliedro derivado.

Angulo rectilines "2 ×4" del diedro formado por de reras
contiguas del presido deresado en una arista del tetras.

dro dado.

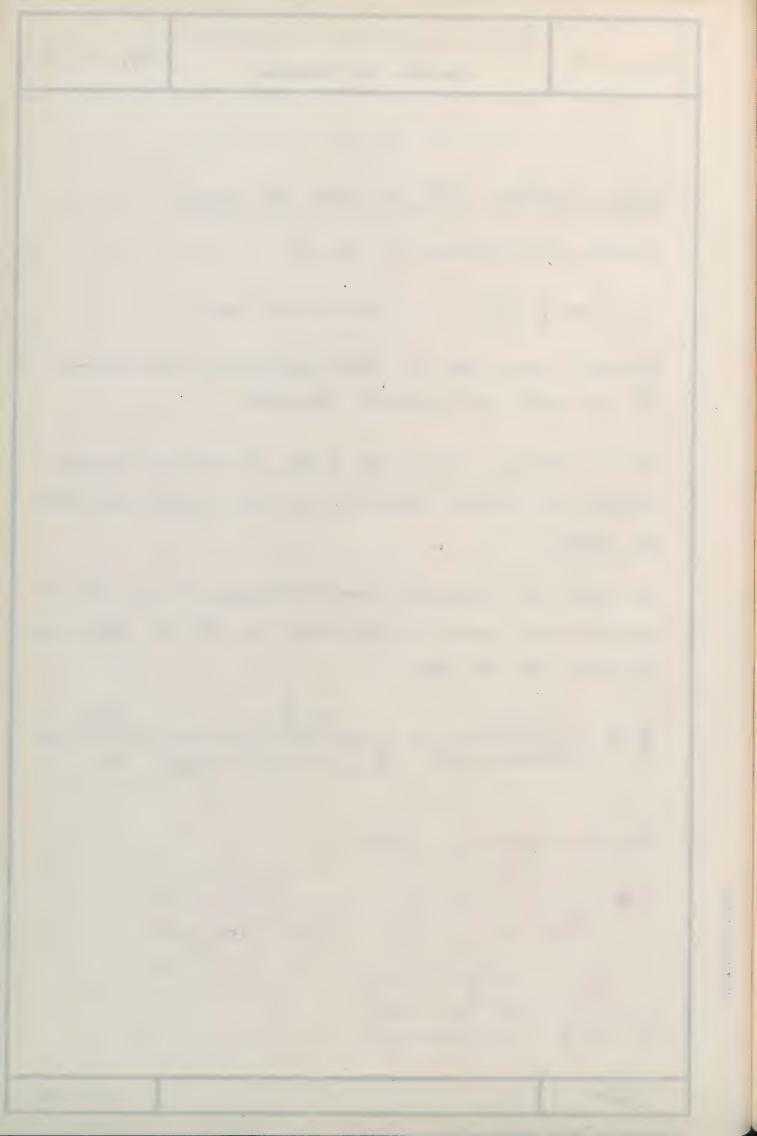
Le deduce de la formula general [4] et tenda autériormente (ver consideraciones previas) sustituyando en alla la valenes particulaires de este caso

$$\frac{1}{2} \propto_4 = \frac{a_4 k_4}{(k_4)^2 - a_4 c_4 + (c_4)^2} = \frac{a_4 \times \frac{\sqrt{2}}{3} a_4}{(\frac{\sqrt{2}}{3} a_4)^2 - a_4 \cdot \frac{1}{3} a_4 + (\frac{1}{3} a_4)^2} = \frac{1}{3} \sqrt{2} = \infty$$

Peranollo del calculo anterior

$$\frac{1}{7} \propto_{4} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{3} (a_{4})^{2}}{\left(\frac{12}{3} a_{4}\right)^{2} - a_{n} \cdot \frac{1}{3} a_{n} \cdot \left(\frac{1}{3} a_{4}\right)^{2}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{3} (a_{4})^{2}}{\frac{2}{9} (a_{4})^{2} - \frac{1}{3} (a_{4})^{2} - \frac{1}{9} (a_{4})^{2}}$$

$$\frac{12}{3} = \frac{1}{3} = 0$$



Del valor auterior se deduce

$$V_{4} = 0$$
ec. $\sqrt{5} = \frac{\pi}{2} = 90^{\circ}$

y por ame quiente

lo que mos denunestra que las dos caras trimiquestras consideradas estan en un mismo plano se transforman en un reombo.

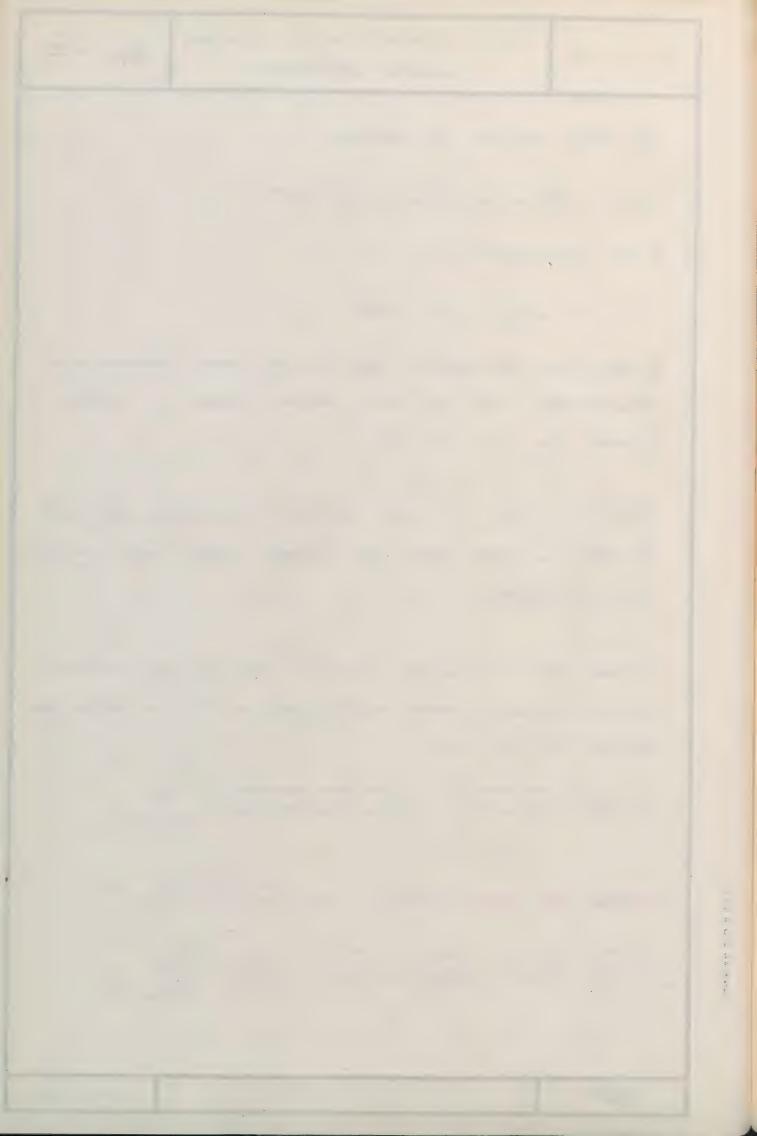
Altura "p" de una cara lateral de la piramide recta formada en cada cara del tetraedro dado (cara del po-liedro derevado).

Le deduce de la lornella general [5] étéride anticionnente (ver consideraciones previas) sustitujende en ella les valores particulares de este caso

$$p = \sqrt{(a_4 - C_4)^2 + (k_4)^2} = \sqrt{(a_4 - \frac{1}{3} a_4)^2 + (\frac{\sqrt{2}}{3} a_4)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3} a_4$$

Desaurello del calculo auterior:
$$p = \sqrt{(a_3 - \frac{a_4}{3})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{3}a_4)^2} =$$

$$=\sqrt{\left(\frac{2a_{4}}{3}\right)^{2}+\left(\frac{\sqrt{2}}{3}a_{4}\right)^{2}}=\sqrt{\frac{4}{9}(a_{4})^{2}+\frac{2}{9}\left(a_{4}\right)^{2}}=\sqrt{\frac{6}{9}}a_{4}=\frac{\sqrt{6}}{3}a_{4}$$



Arista lateral "q" de la pirimide meta regular, a lado ignal del taranquelo issocieres de una cara del poliedro derivado

Le déduce de la sommeter general [6] obtenida anteriormente (ver anuderaciones previas), sustitujendo su ella los valores particulares de este caso.

 $q = \sqrt{(a_4 - c_4)^2 + d_4^2} = \sqrt{(a_4 - \frac{1}{3}a_4)^2 + (\frac{2\sqrt{2}}{3}a_4)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}a_4$

Desarrollo del calculo auterior: $q = \sqrt{(a_4 - \frac{1}{3}a_4)^2 + (\frac{2\sqrt{2}}{3}a_4)^2} =$

$$=\sqrt{\left(\frac{2a_0}{3}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}a_4\right)^2}=\sqrt{\frac{4}{9}a_1^2+\frac{2}{9}a_4^2}-\sqrt{\frac{12}{9}}a_4=\boxed{\frac{2\sqrt{3}}{3}a_4}$$

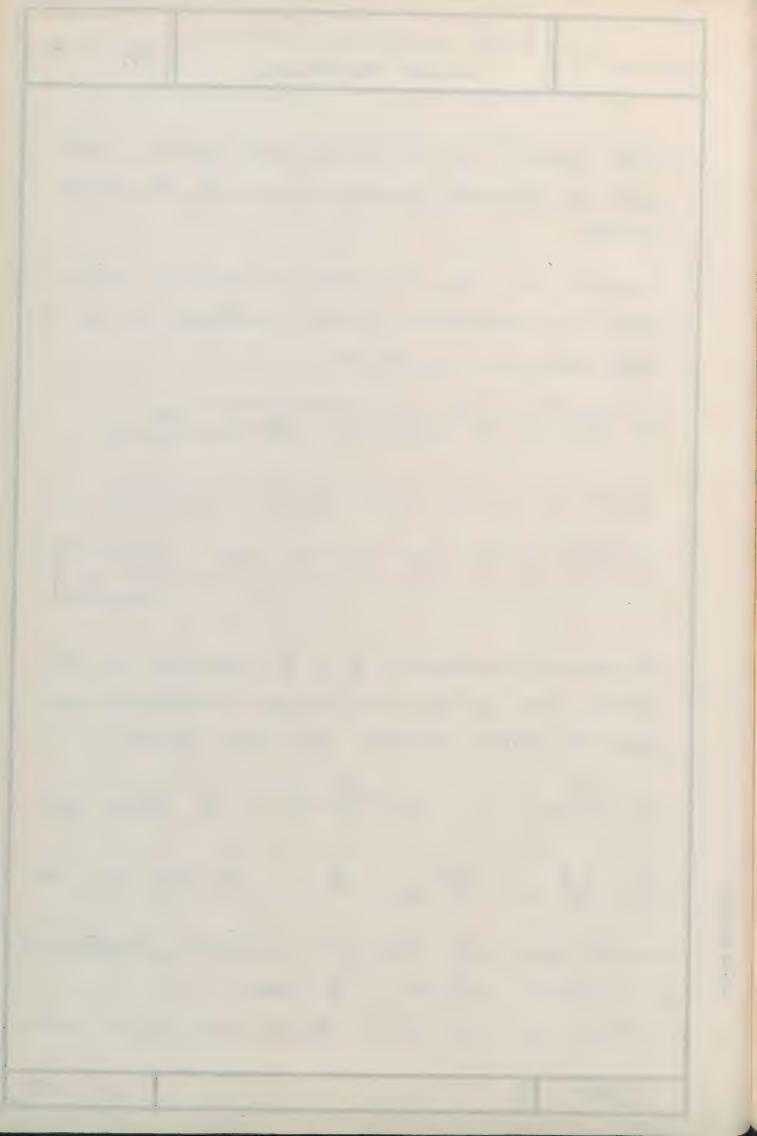
Comporcando los valores de la g q, deducidos en este estudio, base y lado del tricinquelo isósceles de uma cara del poliedos derivado, remis que siendo

$$f_{\mu} = \frac{2\sqrt{6}}{3} a_{\mu}$$
 $g = \frac{2\sqrt{3}}{3} a_{\mu}$, re deduce que

$$\frac{\ell_{11}}{9} = \frac{2\sqrt{6}}{3}a_{11} : \frac{2\sqrt{3}}{3}a_{11} = \sqrt{2}$$
 le cual cros de-

en el vértice opuests a la base.

Como por otra parte herro, visto en el culen-



lo del auguelo "2 4" que dos corres trianquibres de este tipo contiguas por su bare, así potendos derivado, estan en un conismo plano y famin un paralelógramo de lados riquiales (voreste), este paralelógramo sera pues un cuadro de.

For le antiriermente expuesto, llegames a la condución de que "el porcedio derivado del totracións regular", ha de tener "seio caras", todas equales, y en forma de "cuadrado.", per consequiente decha figura será " um exacaso requilar" (lo que acrunes-tra lo expresado en el "Proceso gráfico").

Diagonal o lado "t" que se obtique al unir les exetre.

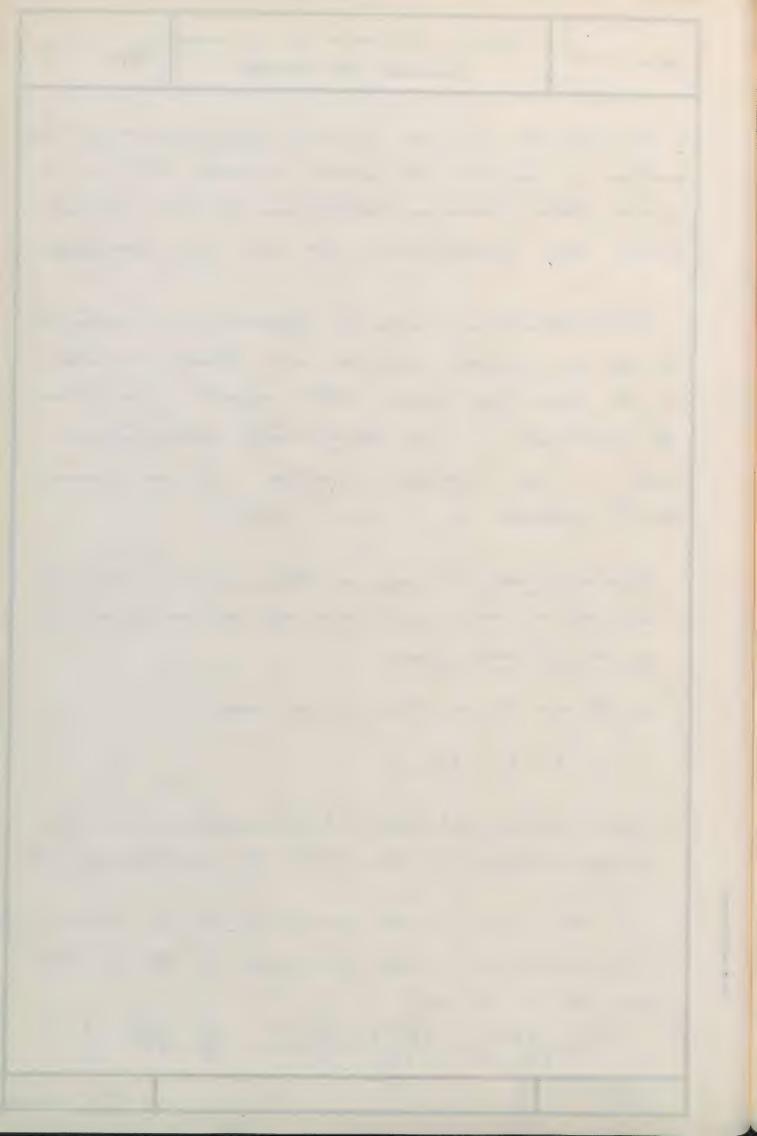
mos de dos lados consecutivos del poligono de una ca
ca del tetraedro dado

En este caso de cara triangular, sera

Laterales contigues en las arectas de la piramide resta

le deduce de la formula general [7] obtenide anteriormente (ver consideraciones prairas), sustituyendo en ella los valores particulares de este caso.

0



Descerollo del calculo outeros:

$$|x_{4}| = \frac{2\sqrt{6}}{3} |a_{4}| \times \frac{2\sqrt{3}}{3} |a_{4}| ; \frac{2\times 2\sqrt{6}}{3} |a_{4}| = \frac{\sqrt{6}}{3} |a_{4}| = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} |\sqrt{\frac{1}{2}}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

forman dos caras contiguas del exaedro regular.

Angulo diedro "B" formado por una cara lateral de la piramide y en base

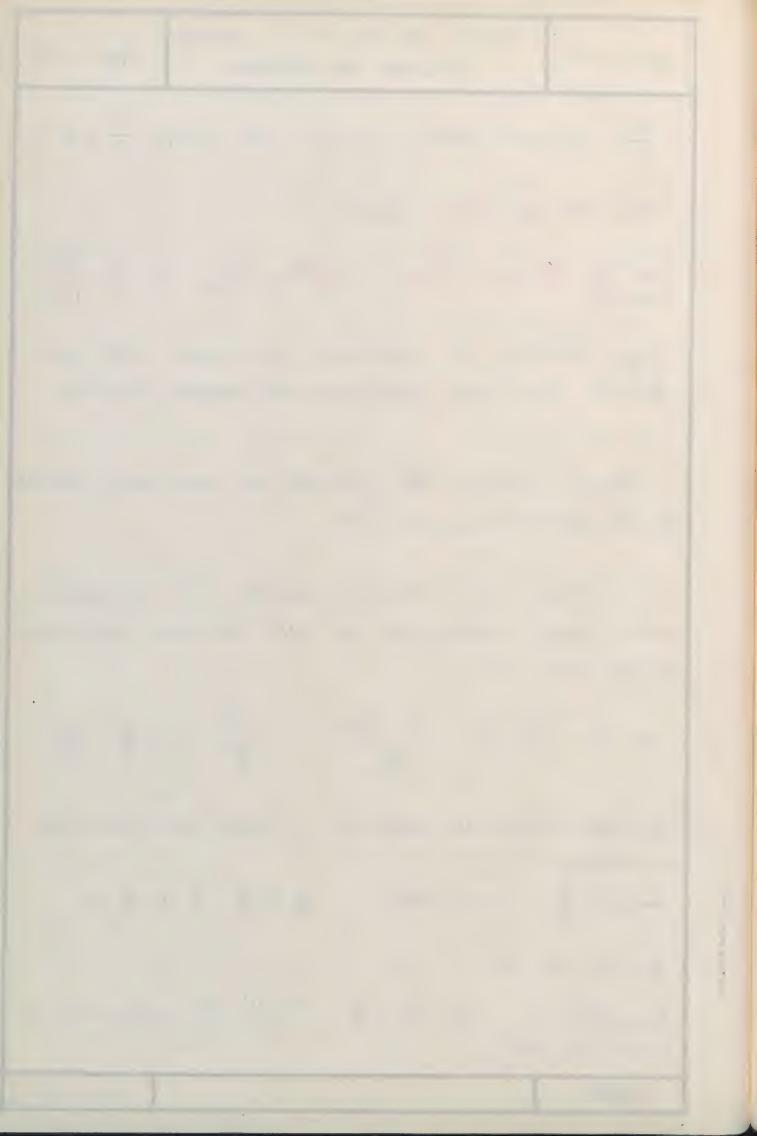
Le deduce de la formula general [8] (ver consideraciences previas) sustituyendo en ella los valores particula-

sen
$$\beta_4 = \frac{a_4 - c_4}{\beta} = \frac{a_4 - \frac{1}{3}a_4}{\beta} = \frac{4 - \frac{1}{3}}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

su vator municies, expresado en grado sescar cimales, se obtiene:

sen
$$\beta_4 = \frac{\sqrt{6}}{3} = 0.81 64 96 6 \dots$$
 If sen $\beta_4 = \overline{1}$, 911 95 44

lon probación:
$$\alpha_4 = 4 + \beta_4 = \frac{70^{\circ} 31' 43.6''}{2} + 54^{\circ} 44' 8.2'' = 90^{\circ}$$
(ver fórmula [11]



cuyo resultado nos confirma el cálculo directo de &, realizado anteriormente.

Peadio "b2" de la esfera tangente a las aristes latecales de las piramides ciectas curas bases son caras del tetracedo regular dado.

Le deduce de la formula general [9] (ver consideraciones previas) sustituyendo en ella los valores partienlares de este caso.

$$b_2 = \sqrt{(a_4)^2 - \frac{q^2}{4}} = \sqrt{(a_4)^2 - (\frac{2\sqrt{3}}{3}a_4)^2} : 4 = \frac{\sqrt{6}}{3}a_4$$

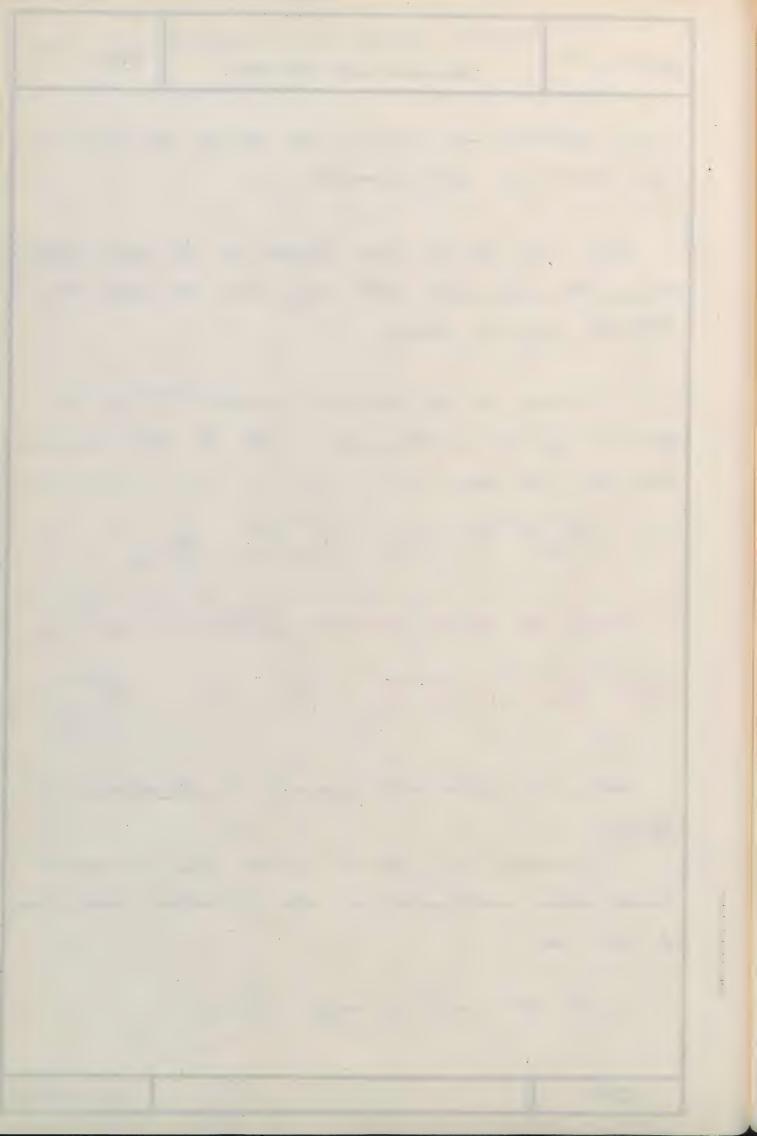
Seramollo del ealento anterior: $\left[b_2:\sqrt{(a_4)^2-\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}a_4\right)^2}:4\right]$

$$=\sqrt{(a_{4})^{2}-\frac{12}{9}:4(a_{4})^{2}}=\sqrt{1-\frac{1}{3}}a_{4}=\sqrt{\frac{2}{3}}a_{4}=\sqrt{\frac{6}{9}}a_{4}=\frac{\sqrt{6}}{3}a_{4}$$

Radio "C," de la esfera inscrita en el policido deri-Nado.

Le deduce de la formula general [10] (ver consideraciones previas) sustituyendo en ella los valores particulares de este caso.

$$C_1 = b_1 \quad \text{sen } \alpha_4 = \frac{\sqrt{3}}{3} \, \alpha_4 \times \text{sen } \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \, \alpha_4$$



Este animo valor se puede deducir de la foramela equivalente [10], en la que

$$C_1 = b_2$$
 sen $V_4 = \frac{\sqrt{6}}{3}a_4 \times \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{3}a_4$

Ina lateral "S" del poliedro derivado

Le obtiene como suma de las aceas laterales de les cinatro pirainudes rectas truanquelares, cuyas caras son triainquels isosceles de base "l", altura "p", valores ya determinados.

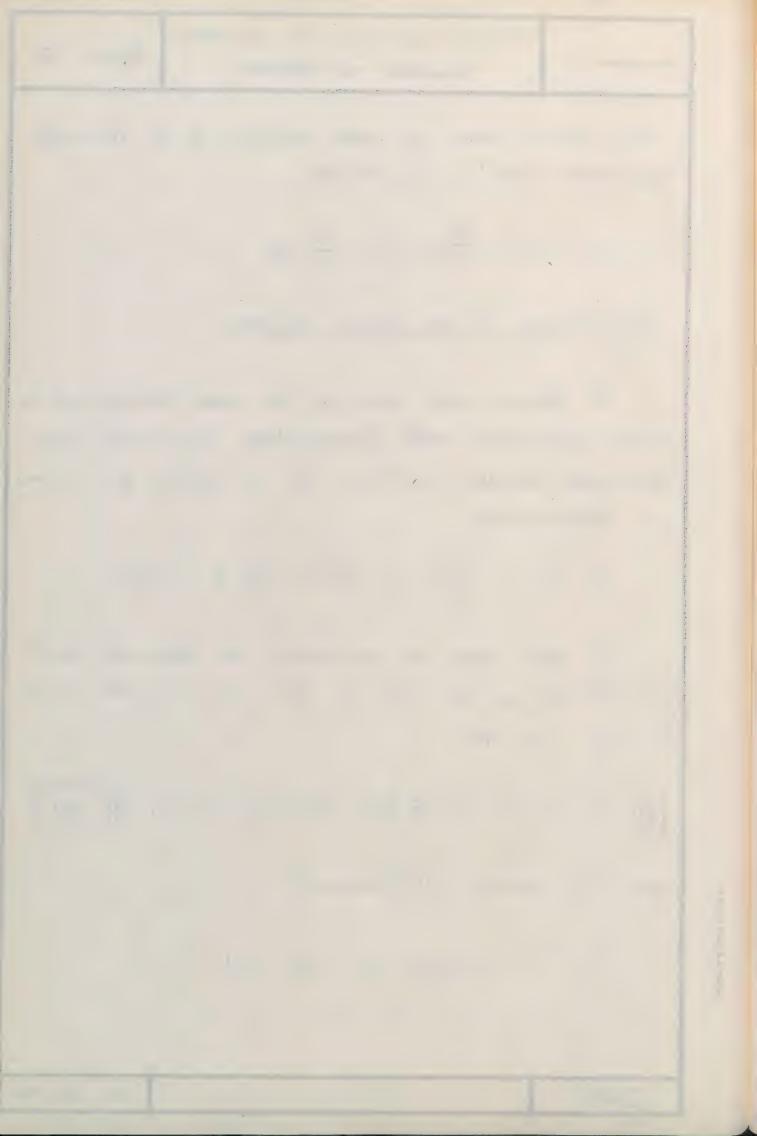
$$S = 4 \times 3 \times \frac{\ell_{4} p}{2} = 6 \times \frac{2\sqrt{6}}{3} a_{4} \times \frac{\sqrt{6}}{3} a_{4} = 8(a_{4})^{2}$$

Este valor debe ser coincidente al deducirlo de los ya obteriodos en la larm. 2, formulas 18 y 11, al ser a4 = a6, ya que

$$S = S_6 = 6 l_6^2 = 6 \times \left(\frac{2}{13} a_6\right)^2 = \frac{6 \times 4}{3} \left(a_6\right)^2 = 8 \left(a_6\right)^2 = 8 \left(a_4\right)^2$$

como asi sucede efectivamente.

(zigne en toja 27)



Nolumen V del priedro derivado

J. Méseus como suma del volumen del totraccho dado

V = V4 + 4 × $\frac{S_3 \times h}{3}$ siends "S3" el area de una cara del tetraedro g "h" la altura de la piramide.

Para obtener V_h en función de a_n, ver lam. 1, fórmulas 9 y 1, que mo da

$$V_{4} = \frac{\sqrt{2}}{12} (I_{4})^{3} = \frac{\sqrt{2}}{12} \left(\frac{4}{\sqrt{6}} a_{4} \right)^{3} = \frac{8\sqrt{3}}{27} (a_{4})^{3}$$

Desarrollo del calculo auterior: $V_4 = \frac{\sqrt{2}}{12} \left(\frac{4}{\sqrt{E}} a_A \right)^3 =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{12} \times \frac{4^{3}}{6 \sqrt{6}} (a_{4})^{3} = \frac{64}{72} \sqrt{\frac{2}{6}} (a_{4})^{3} = \frac{8}{9} \sqrt{\frac{1}{3}} (a_{4})^{3} = \frac{8}{9\sqrt{3}} (a_{4})^{3} = \frac{8}{$$

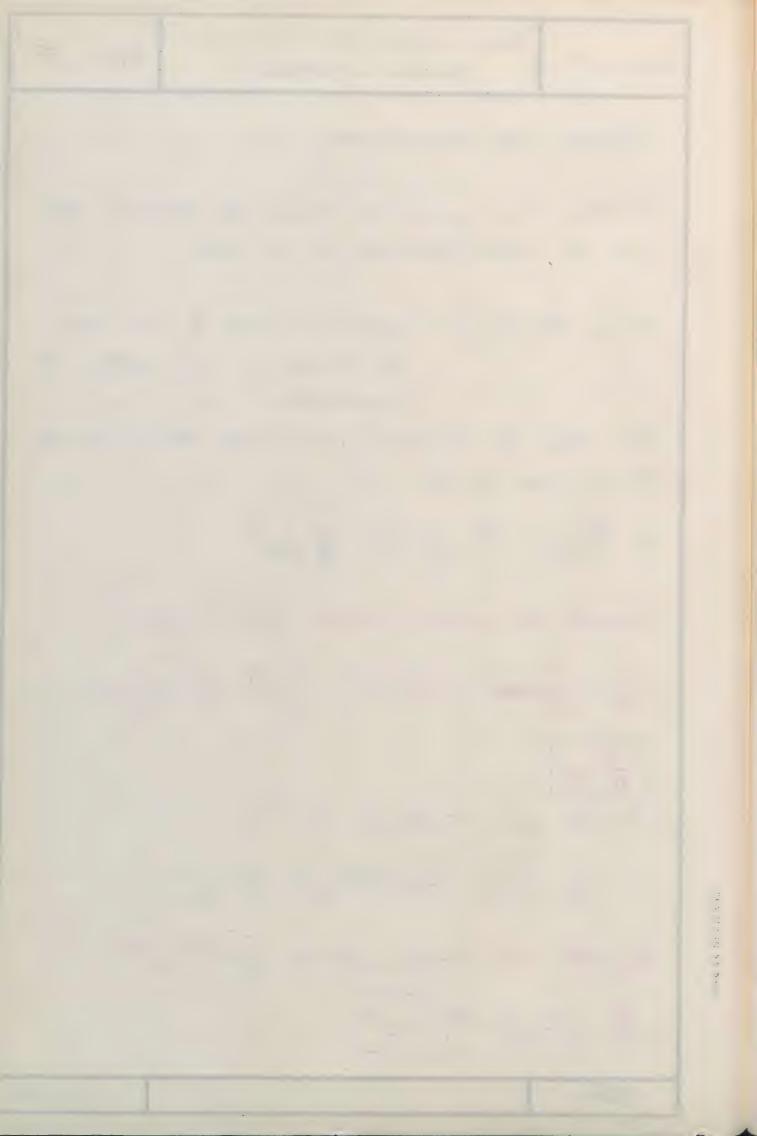
$$= \boxed{\frac{8\sqrt{3}}{27}(a_A)^3}$$

For the parte tendremes que

$$S_3 = \frac{\sqrt{3}}{4} (\ell_1)^2 = \frac{\sqrt{2}}{4} \times \left(\frac{2\sqrt{6}}{3} a_4 \right)^2 = \frac{2\sqrt{3}}{3} (a_4)^2$$

Desarrello del calculo auterior: $S_3 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{21\overline{c}}{3}a_{\perp}\right)^2 =$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{24}{9} \left(a_4 \right)^2 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \left(a_4 \right)^2$$



of tamber que (ver lan. 1. sommeter 1 2 3)

$$h = a_4 - C_4 = a_4 - \frac{\sqrt{6}}{12} k_4 = a_4 - \frac{\sqrt{c}}{12} * \frac{4}{\sqrt{6}} a_4 =$$

$$= a_4 - \frac{1}{3} a_4 = \frac{2}{3} a_4$$

y finalmente

$$V = V_4 + 4 \times \frac{53 \times h}{3} = \frac{813}{27} (a_4)^3 + \frac{4 \times \frac{213}{3} (a_4)^2 \times \frac{2}{3} a_4}{3} = \frac{813}{3} (a_4)^3 \times \frac{2}{3} a_4 = \frac{813}{3} (a_4)^3 \times \frac{2}{3} a_5 = \frac{813}{3} (a_4)^3 \times \frac{2}{3} a_5 = \frac{813}{3} (a_5)^3 \times \frac{2}{3} a_5 = \frac{813}{3} a_5 = \frac{813}{3} a_5 = \frac{813}{3} a_5$$

$$=\frac{8\sqrt{3}}{3}(a_{A})^{3}$$

Desarrollo del cálculo auterior:

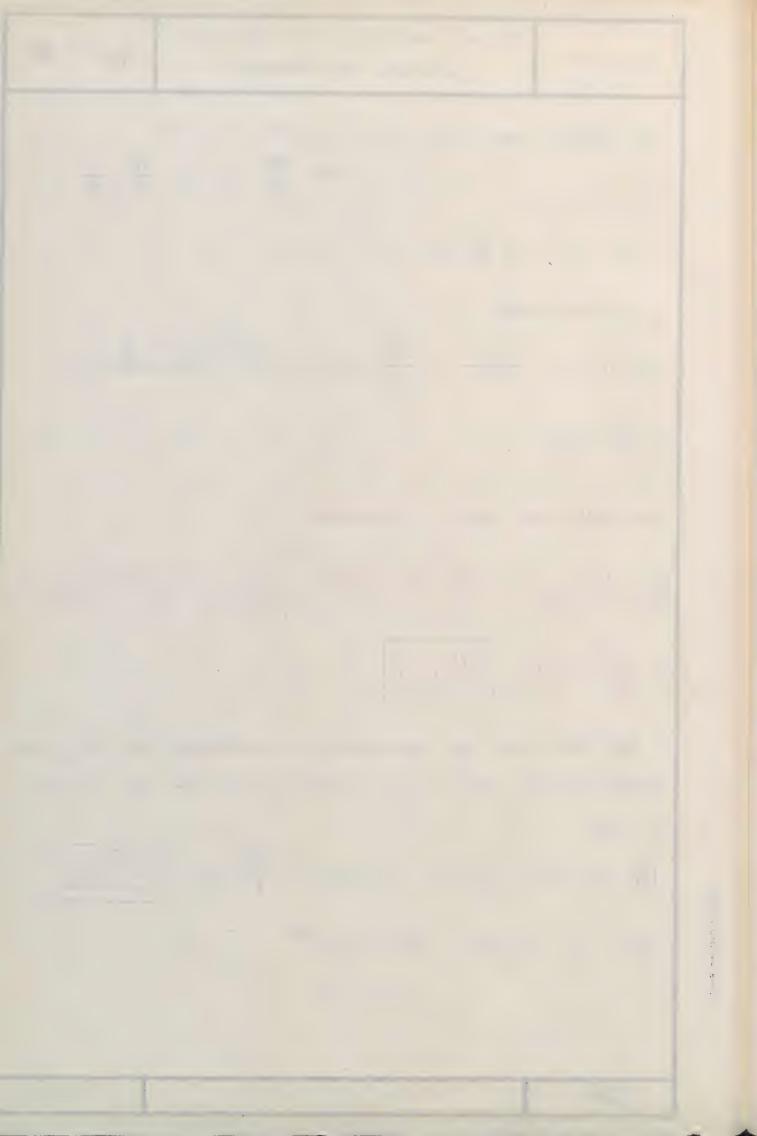
$$V = \frac{8\sqrt{3}}{27} (a_4)^3 + \frac{4 \times \frac{2\sqrt{3}}{3} (a_4)^2 + \frac{2}{3} a_4}{3} = \left[\frac{8\sqrt{3}}{27} + \frac{4 \times 2 \times 2 \times \sqrt{3}}{27} \right] (a_4)^3 =$$

$$=\frac{24\sqrt{3}}{27}(a_4)^3=\boxed{\frac{8\sqrt{3}}{9}(a_4)^3}$$

Este valor debe ser coincidente al deducirlo de 15. ya obtenidos en la lam. 2, foranelas 19 y 11, al ser a, = 96, ya que

$$V = V_6 = (\ell_6)^3 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} a_6\right)^3 = \frac{8}{3\sqrt{3}} (a_6)^3 = \frac{8\sqrt{3}}{9} (a_6)^3 = \frac{8\sqrt{3}}{9} (a_4)^3$$

como asi sucede efectivamente



on el enadro sinoptico que dans a continuación, resen-

CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
236 14	$\frac{2\sqrt{6}}{3}$ α_4	1. 63 29 93 a ₄
237 6,	$\frac{\sqrt{3}}{3}$ a_4	0. 57 73 50 d ₄
238 b ₂	$\frac{\sqrt{6}}{3}$ a_4	0, 81 64 97 04
239 C4	$\frac{1}{3}$ a_4	0. 33 33 33 94
240 C1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$ a_4	0, 57 73 50 ··· a ₄
E41 0/4	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$ α_4	0., 94 28 09 94
242 K4	V2 04	0, 47 14 05 014
2 44	sen $\Psi_4 = \frac{\sqrt{3}}{3}$	sen $9_4 = 0.577350$ 2 $9_4 = 70^{\circ}31'43.6"$
244 2 ×4	tg 94 = 20	2 4 = 180°
245 2 Y4	sen $\Upsilon_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}$	sen Y4 = 0.70 71 07 2 Y4 = 90°
246 B4	sen $\beta_4 = \frac{\sqrt{6}}{3}$	sen $\beta_A = 0.81 64 97$ $\beta_4 = 54^{\circ} 44' 8,2''$
247 p	$\frac{\sqrt{6}}{3}$ O_4	0, 81 64 97 04
248 9	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$ a_4	1, 15 47 01 94
249 t	$\frac{2\sqrt{6}}{3}$ a_u	1. 63 29 93 a4
250 5	$8 (a_4)^2$	8,00 00 00 (04)2
251	$\frac{8\sqrt{3}}{9}(a_4)^3$	1, 53 96 01 (a4) ³

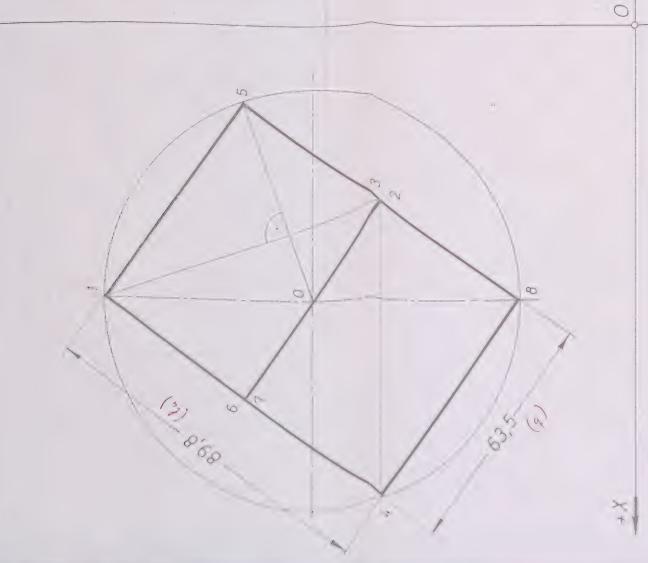
FIGURA CORPÓREA

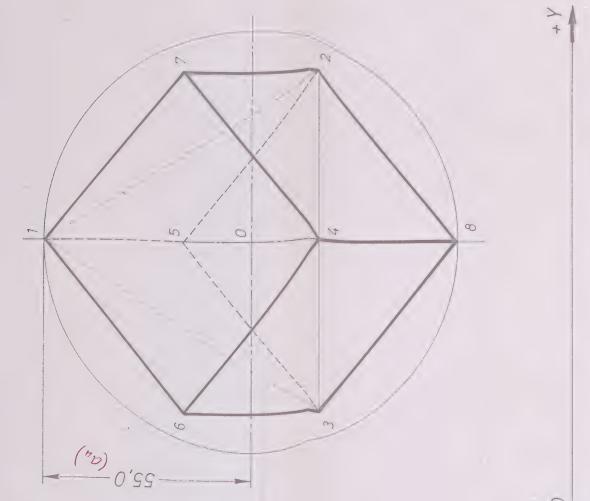
mm de lado (ver lam. 2).

UNE A4 210 X 297



Z+





(4)8,12

NUMERACIÓN DE VÉRTICES

00 Poliedro derivado (exaedro). Tetraedro.

1+

ENUNCIADO

re-Representar por el método gráficocentro de la esfera circunscrita a és-<u>-</u> te, y sobre ella, los centros de cada planos I, II y III el puntos con los vértices del polígono cara, uniendo a continuación estos poliedro derivado de un tetraedro gular obtenido al proyectar desde analítico, en los de dicha cara.

Las coordenadas del centro de la 0 esfera son: 0 (72, 72, 85) mm de 55 mm. radio de la misma

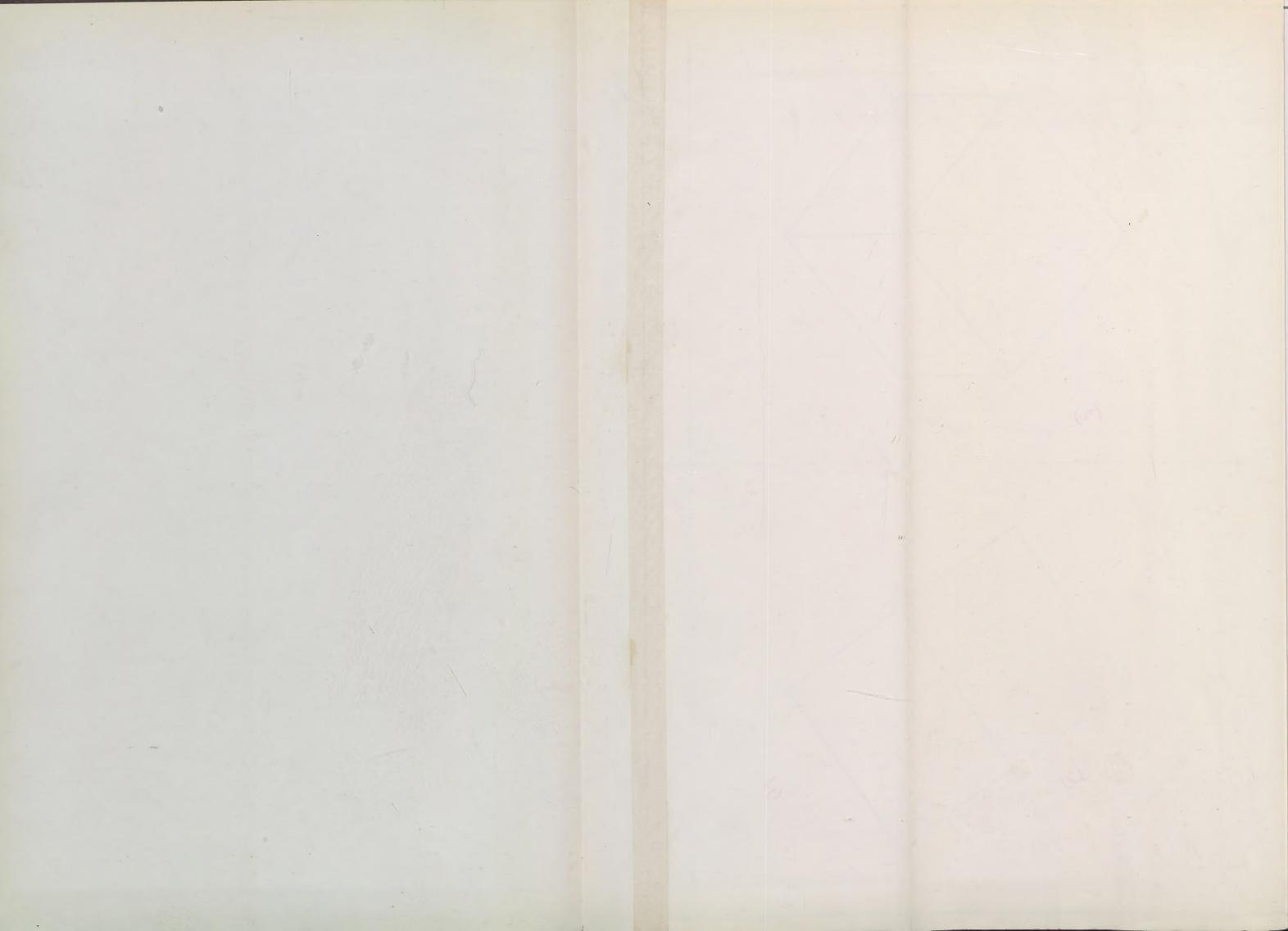
es-Q A3v y Dibujar en formato cala 1:1.

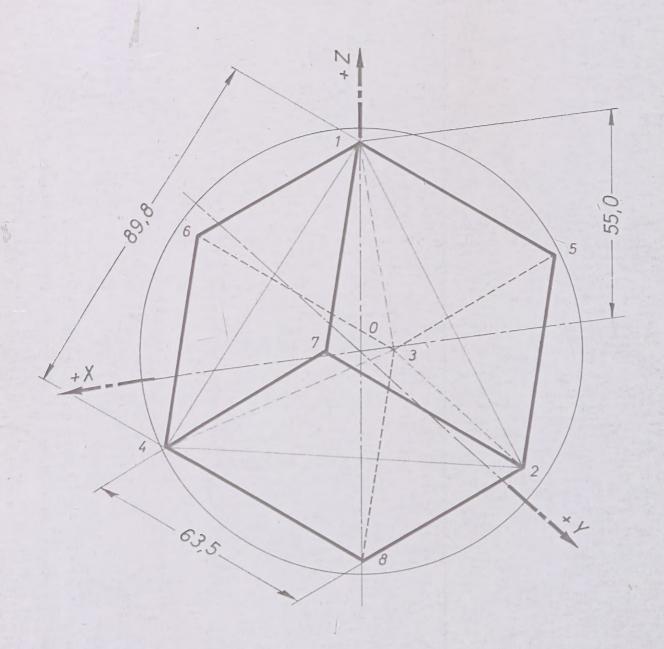
De entrega Entregada	De entreg	Propuesta	Fecha: lumno: Escala
			Escala
			Alumno:
			Fecha:
a Entregada		Propuesta	

10	0,0	Poliedro derivado del	edro	Poli	Escala 1 · 1
					Alumno:
(fire	cación				Fecha:
	Califi-	Entregada	Propuesta De entrega Entregada	Propuesta	

Escuela

Curso





Poliedro derivado del tetraedro regular

